



# Contribution à une théorie de Morse-Novikov à paramètre

Carlos Moraga Ferrandiz

## ► To cite this version:

Carlos Moraga Ferrandiz. Contribution à une théorie de Morse-Novikov à paramètre. Topologie géométrique [math.GT]. Université de Nantes, 2012. Français. NNT : . tel-00768575

**HAL Id: tel-00768575**

**<https://theses.hal.science/tel-00768575>**

Submitted on 22 Dec 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES  
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DES MATHÉMATIQUES

Année : 2012

N° attribué par la bibliothèque universitaire

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

# Contribution à une théorie de Morse-Novikov à paramètre

## THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : MATHÉMATIQUES

*Présentée  
et soutenue publiquement par*

**Carlos MORAGA FERRÁNDIZ**

*le 12 octobre 2012, devant le jury ci-dessous*

|                            |                          |  |
|----------------------------|--------------------------|--|
| <i>Président du jury</i>   | : Vincent COLIN          | Professeur (Université de Nantes)                |
| <i>Rapporteurs</i>         | : Allen HATCHER          | Professor (Cornell University)                   |
|                            | Jean-Claude SIKORAV      | Professeur (École Normale Supérieure de Lyon)    |
| <i>Examineurs</i>          | : Christian BLANCHET     | Professeur (Université Paris Diderot)            |
|                            | Mihai DAMIAN             | Maître de conférences (Université de Strasbourg) |
| <i>Directeurs de thèse</i> | : François LAUDENBACH    | Professeur émérite (Université de Nantes)        |
|                            | Andrei PAJITNOV          | Professeur (Université de Nantes)                |
| <i>Laboratoire</i>         | : Laboratoire Jean Leray |  |



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>   | <b>ix</b> |
| <b>1 Algèbre</b>  | <b>1</b>  |
| 1.1 Anneaux de Novikov  | 1         |
| 1.1.1 L'anneau de Novikov associé à un homomorphisme de groupe                  | 1         |
| 1.1.2 Troncatures   | 5         |
| 1.1.3 Abélianisation et Déterminants  | 7         |
| 1.1.4 Lemme des longueurs   | 10        |
| 1.1.5 Inversibilité   | 12        |
| 1.2 Matrices élémentaires et auto-élémentaires                                  | 12        |
| <b>2 Géométrie et topologie</b>   | <b>15</b> |
| 2.1 Formes équipées   | 15        |
| 2.1.1 Formes de Morse, de naissance-élimination et de queue d'aronde            | 15        |
| 2.1.2 Pseudo-gradients  | 16        |
| 2.1.3 Longueur d'une orbite et variétés invariantes tronquées à la longueur $L$ | 22        |
| 2.1.4 Enroulement et complexe de Morse-Novikov                                  | 24        |
| 2.1.5 Gradients $L$ -transverses  | 28        |
| 2.1.6 Formes équipées   | 31        |
| 2.2 Familles de formes équipées   | 32        |
| 2.2.1 Familles de 1-formes  | 32        |
| 2.2.2 Modèles locaux  | 34        |
| 2.2.3 Chemins de 1-formes basée, taille et graphique de Cerf-Novikov            | 37        |
| 2.2.4 Chemins de pseudo-gradients basés. Liaisons $L$ -élémentaires             | 39        |
| 2.2.5 Chemins de formes équipées et $L$ -transversalité à paramètre             | 42        |
| 2.2.6 Opérations élémentaires comme chemins                                     | 43        |
| <b>3 Mise sous forme normale</b>  | <b>61</b> |
| 3.1 Préparation des chemins   | 61        |
| 3.1.1 Mise en évolution normale   | 61        |
| 3.1.2 Élimination des centres   | 64        |
| 3.1.3 $L$ -indépendance   | 71        |
| 3.1.4 Mise en évolution $L$ -normale  | 77        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 3.1.5    | Application du lemme des longueurs pour les chemins à deux indices . . . | 80         |
| 3.2      | Construction des lacets en queue d'aronde . . . . .                      | 83         |
| 3.3      | Greffe des lacets . . . . .  | 94         |
| 3.3.1    | Coefficients directeurs et application de rencontre . . . . .            | 94         |
| 3.3.2    | Greffe . . . . .   | 96         |
| <b>A</b> | <b>Anneaux filtrés</b>   | <b>107</b> |
| A.1      | Complétions par rapport à une métrique ou une filtration . . . . .       | 107        |
| A.2      | Quelques propriétés de l'anneau de Novikov . . . . .                     | 112        |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>115</b> |
|          | <b>Index</b>   | <b>119</b> |

# Remerciements

Le défit d'une thèse est celui de se battre contre la feuille blanche avec pour seule arme un stylo. Notre pensée, sève de l'arbre des mathématiques, tâtonne à la dérive pour trouver une pousse qui aspire à bourgeon. Entretemps la vie éclôt à un rythme effréné ; pendant qu'elle suit son flot, notre cécité nous effraye devant l'abîme d'une crainte : celle d'une pousse dont l'illusion s'estompe. Un terrain semé de persévérance nous est indispensable, bien que point suffisant. Que cette pousse ne se soit pas brisée, est faute des nombreux acteurs qui suivent, et que je veux remercier.

Merci à Jean-Claude Sikorav ainsi qu'à Allen Hatcher d'avoir rapporté mon travail, leur opinion est pour moi la seule preuve de l'existence de ce bourgeon. Je remercie également Allen Hatcher d'avoir signalé une fausse idée que j'avais sur les travaux de Kiyoshi Igusa ainsi que de sa contribution au sixième volume de la série *Astérisque* qui m'a autant occupé qu'amusé. Un grand merci à Jean-Claude Sikorav pour les deux journées de discussions passionnantes qu'il m'a consacrées lors d'un passage à Nantes.

Je remercie l'affabilité et soutien montrés par Christian Blanchet, Vincent Colin, Mihai Damian, Jean-Claude Sikorav et David Chataur, mon jury au sens large.

Je remercie chaleureusement Christian Blanchet de m'avoir rassuré à Montpellier lors de notre première rencontre.

Un grand merci aussi à Vincent Colin et Paolo Ghiggini pour s'être intéressés à ma progression, notamment lors des comités de suivi de thèse.

Je remercie Andrei Pajitnov, celui qui me permet de rentrer dans la forêt mathématique et de découvrir la théorie de Morse déjà en  $M^2$ , tout en laissant que mes racines cherchent leur propre chemin.

Je ne saurai trouver la manière de remercier la bienveillance constante et l'écoute sensible de François Laudenbach, celui qui a élagué une multitude d'imperfections mathématiques ainsi que taillé mon français jour après jour. Je le remercie de m'avoir proposé un projet de longue haleine aussi attachant, ainsi que pour le dévouement inouï dont il a fait preuve pendant la dernière année de thèse. Merci d'avoir partagé ton savoir à la fois que tu devenais un ami.

Une branche de l'arbre, dite de l'enseignement, a commencé à poindre du tronc.

Je remercie Anne Vaugon pour ses conseils sur la gestion de cours et d'avoir voulu partager un groupe de *SVT* avec moi ; je remercie François Laudenbach d'avoir essayé de m'apprendre la manière dont on doit concevoir une épreuve. Merci également à Jean-Marc Patin et Nathalie Burguin-Gleize pour l'agréable climat créé pendant la durée du module d'arithmétique ; merci à Abderemane Morame pour la préparation de la plupart d'exercices de topologie et calcul différentiel et d'avoir accepté certaines de mes propositions pour les feuilles de *TD* et de mes remarques pour les contrôles continus. Merci à Christoph Sorger pour consulter mon avis sur le contenu du même module et me faire penser au *Max Planck*. Merci à Sylvain Gervais pour la

patience qu'il a manifesté lors des petits soucis des relevés de notes que j'ai rencontrés. Merci à Samuel Tapie pour la gestion magnifique du cours d'analyse, pour la clarté de ses consignes et son dialogue constructif et dynamique. Merci à Bilal Saad d'être venu assidûment pour discuter sur les exercices dudit cours. Merci à François Jaubertau et Laurent Piriou de m'avoir guidé dans les procédures d'accès à l'enseignement.

Je remercie Paolo Ghiggini de l'effarante masse de mathématiques qu'il a mobilisée à Nantes. Merci à Friedrich Wagemann pour m'avoir reçu chez lui, bien que le départ en vacances approchait dangereusement. Je remercie Luc Menichi et Hossein Abbaspour de m'accompagner durant la période où je me suis dérouté mathématiquement. Je remercie Jean-Claude Thomas d'avoir orienté mon questionnement sur Whitehead. Je remercie Aurélien Djament pour l'organisation du groupe de travail de topologie algébrique que j'ai suivi dans la mesure du possible. Je remercie Vincent Franjou d'avoir encouragé les thésards à se construire un réseau aussi solide que possible et de ne jamais avoir représenté une obstruction à cet effet. Je remercie Gueorgui Popov pour les échanges *Erasmus* gérés par lui il y a quelques années. Merci à Gilles Carron de m'avoir accepté en  $M2$ , m'avoir parlé du Brésil et largement dépassé aux « Foulées du tram ». Je remercie Laurent Thomann d'avoir décalé l'exposé de son séminaire pour qu'il ait intersection vide avec ma soutenance de thèse. Je remercie Gaël Meigniez de m'avoir donné refuge dans son bureau suite à une rencontre atypique.

Je remercie tous ceux qui ont la vertu de rendre plus gaie la vie au labo ; le bien-être n'aurait pas été pareil sans la disponibilité de Brigitte Joubert, les blagues de Claude Jouault et l'efficacité d'Annick Egurbide, Colette Boulard, Lucie Guillermin et Stéphanie Benoît.

Un autre merci pour Saïd El Mamouni et pour Éric Le Douaran, qui mirent à ma disposition l'*i-palette* d'Anne Vaugon et me dirent où trouver les cabales pour faire marcher *eduroam* respectivement.

Un merci spécial à Delphine Rousse d'avoir supporté mon bombardement de courriers sans plainte aucune, ainsi qu'à Bertrand de nous avoir injecté autant d'énergie à travers ses cafés et sa bonne humeur.

Que dire du piailler des oiseaux qui a apporté la touche allègre à l'inexorable passage du temps. Le couple de Nicolas : Hussenot, qui feuillette entre co-bureau et colocataire, brownien errant entre Nantes et Vannes qui m'apprit le go ; et Raimbaud, le maître des groupoïdes ainsi que des cartes Magic, capable de parcourir un spectre de registres de langue gargantuesque (non seulement en français !) et seul thésard de connaissances 🐼iennes approfondies. Baptiste Devyver, l'ami qui vint connaître ma culture et mon pays ; de qualités innombrables : chanteur, photographe, guitariste, polyglotte... dont l'esprit de partage est infini. Salim Rivière, algébriste polyvalent et « co-buro » d'une curiosité insatiable, qui ne soupçonne peut-être pas à quel point son intérêt pour mon travail, toujours accompagné d'un sourire, m'a encouragé. Anne Vaugon, vénérable et de contact affable ; merci de m'avoir fourni l'*i-palette* ainsi que pour les conversations mémorables où nous nous sommes plongés. Mon presque homonyme Carl Tipler, d'une sensibilité éclatante et rêveur infatigable ; j'attends impatient le jour où nous gravirons un sommet ensemble. Alexandre Quesney, aussi dit Alphonse, d'une bonne humeur de signe

invariant, assureur mythique en lacet libre et ouvrier antipodal des voies maté-mathiques. Simon Covez, qui intégra le caractère SIOEGROUBMEXUL trop tôt pour que nous puissions aller à d'autres *HellFest* ensemble. Andrew Clarke, géomètre et citoyen du monde inégalable ; mes journées furent éclairées par le passage par Nantes de ce matonaute courageux. Vivien Desveaux, inconditionnel des éditions du *GDTTC*, champion international de go et de taroînche, dont le *MUSCLe* intuitif remarqua aussitôt ma curiosité par sa langue natale. Rafik Imekraz, futur Président de la France, qui n'oublie pas sa promesse concernant l'Espagne. Alexandre Uzureau, aussi dit Albert, d'une douceur inusuelle et qui m'a très souvent soutenu pendant les journées supplémentaires que je vous ai fait dépenser au *RU*. Tanja Becker, qui put déguster une vraie tortilla de patatas et qu'avec une cohérence faisceautique, eut la vaillance de changer son devenir. Céline Sarazin, qui a trouvé les coquilles que personne n'avait vues dans mes slides de soutenance, mais qui a surtout veillé à entretenir l'harmonie des bois de la forêt doctorante. Julien Royer, qui m'invita à aller manger avec tout le monde pour la première fois (oui, oui, souviens-toi), me fit goûter le *Gin Fizz* pour la première fois, et m'invita au séminaire de Toulouse aussi pour la première fois quand j'eus une page web. Ethan Cotteril, qui m'apporta la dimension du compromis social, quoiqu'un peu tropicale, si ma dédicace ne se trompe pas. Sheila Sandon, la marguerite du labo, génératrice des jacarandas translatés et transplantés, peut-être un peu tôt dans l'année. Thomas Guyard, inventeur de la notion de « trèfle de gamins », créateur de la notion de poster en *3D* et premier matheux lauréat à la *J-DOC*. Gilberto Spano, catégorifieur inespéré qui décela une quantité faramineuse de secrets linguistiques pour que j'arrivasse à formuler la conjecture sur la distance relative du triplet de points (ES, FR, IT) appartenant à l'espace métrique des langues. Emanuele Haus, sympathie vivante qui réussit que j'oublie si on était lundi ou mardi, et réaffirma ma conviction sur l'importance de relativiser. Tristan Launay, dont l'esprit électrifant dégagea des particules de *type micro-TiKZ* à anagramme près. Vincent Baron, qui fut toujours d'accord avec moi sur le petit déséquilibre entre luminosité et humidité de la verdissante ville de Nantes. Tiphaine Jezequel, détentrice du titre honorifique Scrabble Jean Leray, qui me proposa infructueusement d'aller voir un super cabaret d'impro musical pendant l'année où je n'arrivais qu'à rédiger. Mourad Nachaoui, qui voulut m'apprendre en vain quelques notions d'arabe et me demanda souvent si tout allait bien. Roberto Mossa, remercié par mes papilles qui savourent maintenant les « italiens » bien serrés. Alain Camanes, qui j'aurais souhaité connaître plus profondément et qui me fit découvrir ce qu'est une soutenance ainsi qu'un pot de thèse très inattendu. Et enfin Antoine, Christophe, Ilaria, Moudhaffar et Virgile, les mésanges de l'arbre, avec lesquels j'espère partager des bons moments pendant le temps qui me reste à Nantes.

Un énorme merci à vous tous !

Merci aussi à toute la faune et flore environnantes qui ont autant enrichi ma routine : les grimpeurs, *Le Baroudeur*, la *CIMADE*, nos voisins Jérôme, Solène et leurs petits. . .

Un mot spécial pour Alexis, Claire et Valentin pour son soutien lors d'un été où je me suis beaucoup questionné, ainsi que pour autant d'autres moments inoubliables passés ensemble. . . Merci à ceux qui sont venus survoler le jardin nantais (ou même s'y installer !) : Polar, Luis, Óscar, Sento, Simon, Samuel, Mathilde, Noémie, Mitia et Pablo. Merci aussi à Sylvain, qui m'a toujours ouvert sa porte lors de mes séjours ou passages le plus improbables par Paris.



Merci à tous ceux que j'oublie sur les rives, probablement de l'Erdre o del Júcar. Aussi à ceux que je ne cite pas pour éviter que ces remerciements ne deviennent le centre de ma thèse !

Cómo expresar la inmensa gratitud que siento hacia mi familia, que ha regado y abonado el jardín del árbol sin cesar.

Chatín, gracias por tus ganas de sonreírle siempre a la vida, nunca podré olvidar los años que pasamos juntos en Valencia. Rita, intrépida gusanita, gracias por tu fé ciega en mí que siempre me ha insuflado coraje, así como los mensajes que cada día me han arrancado una sonrisa. Jose, gracias por haberte abierto a nosotros, gracias por haber contribuido a crear armonía en el hogar y en multitud de situaciones peliagudas, gracias por haber decidido formar parte de esta nuestra familia, a veces tan complicada como pequeña. Mamá, gracias por la comprensión sobre el rumbo que decidí tomar ; sé que ha sido y es difícil, pero también que el hilo de plata es irrompible. Y ya que de decisiones se trata, te agradezco la que es para mí la más fundamental de todas y la que más me alegra : la de haber querido que yo existiese.

Gracias a todos por haberme apoyado desde la distancia sin haberos alejado, por haberme brindado un cariño inefable. En definitiva, por ser quiénes y cómo sois. Os quiero a todos así.

Je ne veux pas oublier celle qui m'a proportionné un deuxième foyer : ma famille en France.

Merci a Daniel et Marie Thérèse de m'avoir accueilli dans la confiance depuis le tout début. Merci à Alex et JB d'avoir ajouté une pincée de sel (de Guérande, sans doute) et un tas de galettes à de nombreux weekends en Bretagne ainsi que d'avoir reçu mes consanguins à plusieurs reprises comme s'il s'agissait des leurs. Merci à Manuel et Morgane d'avoir partagé leurs projets, leur sourire et un temps précieux avec moi à chaque rencontre. Merci aux petites nièces et petits neveux qui ont décroché beaucoup de mes rires et de mes cheveux. Merci aux Dourmap, sans aucune exception, pour la sincère touche amiable dont tout échange avec eux vient muni, ainsi que de nous avoir laissé pétrifiés devant la beauté des canyons.

Finalmente, merci à celle qui donne un sens à l'âme de cet arbre, celle qui représente la terre qui l'a nourri et le soutient, celle qui m'a permis de m'enraciner en France, de me re-connaître en français et d'apprendre de mes défauts ; celle qui m'a enseigné à apprécier la nature et qui m'éloigne du vide tout en m'aidant à le percer. Celle qui, en faisant mijoter l'amour, a fait possible que la graine qui germa jadis dans la *Ciudad de la Luz*, devînt arbre ; que le bourgeon, bien que modeste, ait pu fleurir.

Auréli, te doy mil gracias de todo corazón.

# Introduction

L'objectif de cette étude est de créer un cadre de travail pour répondre au problème suivant :

**Question 0.0.1.** *Soit  $M^{n+1}$  une variété différentiable connexe, compacte sans bord, de dimension  $n + 1$  et  $u \in H_{\text{dR}}^1(M; \mathbb{R})$  une classe de cohomologie de de Rham non-nulle de  $M$ . Désignons par  $\Omega_{NS}^u$  l'espace topologique des 1-formes fermées sans zéro dans la classe  $u$ , muni de la topologie  $\mathcal{C}^\infty$ . L'espace  $\Omega_{NS}^u$  est-il connexe ? Sinon, combien y a-t-il de composantes connexes ? Nous nous intéressons donc à l'ensemble  $\pi_0(\Omega_{NS}^u)$ .*

Ce problème n'est autre que celui de l'étude des classes d'isotopie des représentants non-singuliers de la classe  $u$  : soient deux 1-formes fermées  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$ , non-singulières dans la classe  $u$ . Elles sont dites *isotopes* s'il existe une isotopie  $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$  telle que  $\varphi_1^*(\alpha_0) = \alpha_1$  ; elles sont dites *homotopes* parmi les formes non-singulières s'il existe un chemin continu  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  constitué de 1-formes fermées sans zéro dans la classe  $u$  les reliant. Si des telles  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont isotopes, elles sont clairement homotopes parmi les formes non-singulières. La réciproque est vraie par un procédé de type Moser, cf. [LB, App. I] : tout chemin continu de 1-formes non-singulières provient d'une isotopie.

Considérons toutes les 1-formes fermées dans la classe  $u$  que nous notons par  $\Omega^u$ . Cet espace est contractile, car affine, donc convexe : on peut toujours prendre le segment  $(\alpha_t := (1 - t)\alpha_0 + t\alpha_1)_{t \in [0,1]}$  qui relie  $\alpha_0$  à  $\alpha_1$  sans sortir de la classe  $u$ . De la suite exacte longue d'homotopie associée au couple  $(\Omega_{NS}^u, \Omega^u)$ , nous déduisons des isomorphismes

$$\pi_{k+1}(\Omega^u, \Omega_{NS}^u; \alpha_0) \xrightarrow{\partial} \pi_k(\Omega_{NS}^u; \alpha_0) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*$$

et une bijection  $\pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u; \alpha_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(\Omega_{NS}^u; \alpha_0)$ . La question 0.0.1 est ainsi équivalente à celle de l'étude des classes d'homotopie relatives des chemins de 1-formes dans la classe  $u$  à extrémités non-singulières et qui partent d'un point base  $\alpha_0 \in \Omega_{NS}^u$  choisi préalablement une fois pour toutes. Bien entendu, le choix de  $\alpha_0$  et même la question 0.0.1 ont besoin de  $\Omega_{NS}^u \neq \emptyset$ . Un résultat fondamental, dû à [Ti], impose que  $M$  fibre sur le cercle  $\mathbb{S}^1$  car il s'agit d'une condition équivalente à l'existence d'une 1-forme fermée non-singulière sur  $M$ . La question de savoir si la classe de cohomologie  $u$  contient un représentant non-singulier est d'une nature plus compliquée. Le travail fondateur de [No1] aboutit à une théorie homologique pour les 1-formes qui est analogue à celle de Morse et qui établit en particulier une minoration du nombre des zéros d'une 1-forme  $\alpha$  dans la classe  $u$  ; il s'agit des *inégalités de Morse-Novikov*,

qui dépendent de l'homologie  $H_*(M, u)$ , appelée aussi *de Morse-Novikov*. De plus, les minorants sont atteints comme montre [Pa2] pour une certaine classe de variétés  $M$  et  $u$  une classe de cohomologie rationnelle. Cependant, le théorème [Lat, Th. 1'] résolut entièrement la question des représentants non-singuliers dans  $u$  en termes algébriques :

**Théorème 0.0.2** (Latour). *Si  $M$  est une variété compacte sans bord de dimension au moins 6, on a l'équivalence*

$$\Omega_{NS}^u \neq \emptyset \Leftrightarrow \begin{cases} H_*(M, u) = 0 \\ \tau(M, u) = 0 \\ u \text{ et } -u \text{ sont stables} \end{cases}$$

Le même article montre que les classes  $u$  qui vérifient ces conditions forment un ouvert de  $H_{\text{dr}}^1(M; \mathbb{R})$ , qui est non-vidé quand la variété fibre sur le cercle. Nous nous restreignons ainsi aux variétés  $M$  de grande dimension, qui fibrent sur le cercle et aux classes de cohomologie  $u$  qui vérifient les conditions du dernier théorème.

Répondre à la question 0.0.1 est en général difficile et peu de résultats existent. Citons un des plus explicites, présent dans [Lau2] : celui du tore  $\mathbb{T}^m$  pour  $m \geq 6$  et où  $u$  est une classe de cohomologie rationnelle. Le problème est équivalent à celui de l'étude des submersions  $p : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{S}^1$ , et les pseudo-isotopies d'une fibre  $F$  apparaissent comme obstruction à relier deux fibrations. En particulier, [Lau2, Th. 1] dit qu'il existe une infinité de classes d'isotopie de 1-formes non-singulières dans une classe rationnelle  $u$ . D'autres articles qui attaquent des questions en relation ([Si1], [Ki]) font aussi apparaître les obstructions algébriques de la théorie de la pseudo-isotopie.

Ces résultats vont dans la direction d'une théorie pour le problème de l'isotopie des 1-formes fermées non-singulières, analogue au problème de l'isotopie des fonctions différentiables  $\mathcal{C}^\infty(M \times [0, 1], [0, 1])$  sans point critique, qui fut étudié par Hatcher et Wagoner dans les années 70. L'un de leurs résultats est le théorème 2 du chapitre VI de la première partie du volume [HW], que l'on cite ci-dessous.

**Théorème 0.0.3** (Hatcher-Wagoner). *Soit  $\mathcal{P}$  l'espace des pseudo-isotopies relatives au bord d'une variété différentiable connexe, compacte  $(M, \partial M)$  de dimension  $n \geq 5$ . Il existe un épimorphisme de groupes*

$$\Sigma : \pi_0(\mathcal{P}) \rightarrow \text{Wh}_2(\pi_1 M)$$

*dont le noyau est identifié géométriquement au problème « d'unicité des morts ».*

Par ailleurs, dans la deuxième partie dudit volume, Hatcher attaqua la question du noyau de  $\Sigma$  qu'il crut avoir résolue en construisant un certain isomorphisme de groupes entre  $\pi_0(\mathcal{P})$  et  $\text{Wh}_2(\pi_1 M) \oplus \text{Wh}_1(\pi_1 M; \mathbb{Z}_2 \times \pi_2 M)$ . Cependant, K. Igusa trouva une faille dans la construction, mais une portion de l'étude de Hatcher reste valable. De plus, Igusa fit un apport important à la description de  $\pi_0(\mathcal{P})$ ; le résultat de Hatcher-Wagoner dans sa version corrigée et celui d'Igusa sont cités à la suite. On peut les trouver dans [Ig2, Ch. 8].

**Théorème 0.0.4** (Hatcher-Wagoner). *Si la dimension de  $M$  (comme dans 0.0.3) est au moins 6, il existe une suite exacte de groupes*

$$\mathrm{Wh}_1^+(\pi_1 M; \pi_2 M) \oplus \mathrm{Wh}_1^+(\pi_1 M; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{j_1+j_2} \pi_0(\mathcal{P}) \xrightarrow{\Sigma} \mathrm{Wh}_2(\pi_1 M) \longrightarrow 0$$

**Théorème 0.0.5** (Igusa). *Si  $\dim M \geq 6$ , il existe une suite exacte de groupes*

$$K_3(\mathbb{Z}[\pi_1 M]) \longrightarrow \mathrm{Wh}_1^+(\pi_1 M; \pi_2 M) \oplus \mathrm{Wh}_1^+(\pi_1 M; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{P}) \longrightarrow \mathrm{Wh}_2(\pi_1 M) \longrightarrow 0$$

La présente étude ne vise qu'un résultat semblable à celui du théorème 0.0.3. Pour transporter la stratégie dans la première partie du volume [HW] au contexte des 1-formes, plusieurs problèmes de difficultés diverses se présentent :

1. Nous avons besoin d'une stratification de l'espace de 1-formes  $\Omega^u$  pour donner du sens aux familles *génériques* à  $k$ -paramètres dans  $\Omega^u$ , au moins pour  $k = 0, 1, 2$ . Une stratification jusqu'à la codimension 2 est suffisante et nous en trouvons une facilement : elle est induite par la stratification naturelle de l'espace des fonctions différentiables de  $M$  étudiée par Cerf dans [Ce]. La notion de codimension d'un zéro d'une 1-forme est bien définie car une 1-forme fermée est localement exacte et ceci suffit pour décrire une stratification convenable dans la section 2.2.1. On pourra en particulier approcher un chemin quelconque  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]} \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \{0,1\}; 0), (\Omega^u, \Omega_{NS}^u; \alpha_0))$  par un autre transverse à la stratification, que l'on appellera générique. Nous contrôlons ainsi le type des zéros qui peuvent présenter les 1-formes fermées  $\alpha_t$  d'un tel chemin.
2. L'élément algébrique à associer à un chemin de 1-formes générique  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  doit mesurer dans un certain sens, la façon dont les zéros s'éliminent par rapport à comment ils sont apparus. Pour suivre la trace des zéros, on équipe notre chemin avec des champs de vecteurs pseudo-gradients adaptés, notés par  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ . Ceci suit l'esprit de la théorie pour les fonctions où on munissait de pseudo-gradients adaptés un chemin générique de fonctions  $(f_t)_{t \in [0,1]}$ . Nous pouvons ainsi associer un objet algébrique, les complexes de Morse  $(C_*(f_t, \xi_t), \partial_*^{\xi_t})$  où de Morse-Novikov  $(C_*(\alpha_t, \xi_t), \partial_*^{\xi_t})$  selon le cas, qui sont définis en tout temps  $t$  non-singulier : là où  $f_t, \alpha_t$  est de Morse et  $\xi_t$  est Morse-Smale. Une différence fondamentale survient ici.

Dans le cas des *fonctions*, un chemin générique de pseudo-gradients adaptés est Morse-Smale sauf à un nombre fini d'instants. Ceci permet de lire la variation sur la façon dont les variétés invariantes associées aux zéros s'intersectent le long du chemin. Le type d'intersection n'est modifié qu'aux instants de glissement, où il existe une orbite reliant deux zéros de même indice  $i$ , dite de type  $i/i$ . Cette lecture est faite, pour chaque indice, d'un produit fini d'éléments du groupe de Steinberg  $\mathrm{St}(\mathbb{Z}[\pi_1 M])$  (voir [HW, Ch. IV, §1, p.127]).

Dans le cas des *1-formes*, l'espace  $\mathcal{G}^0(\alpha)$  des pseudo-gradients Morse-Smale pour une 1-forme fermée de Morse est dense mais pas ouvert dans l'espace  $\mathcal{G}(\alpha)$  des pseudo-gradients pour  $\alpha$  (voir la proposition 2.1.42). Ainsi, même si l'ensemble d'instants Morse-Smale d'un chemin générique de pseudo-gradients adaptés continue à être dense dans  $[0,1]$ , le chemin

peut présenter un nombre infini d’instantan où  $\xi_t$  n’est pas Morse-Smale : nous ne pouvons pas faire une lecture *finie* des glissements dans  $\text{St}(\mathbb{Z}[\pi_1 M]_{-u})$  a priori. On remarque que connaître les différentielles en deux temps Morse-Smale, n’aide pas à comprendre la géométrie des glissements qui ont lieu entre les deux temps. Nous sommes conduits à introduire une nouvelle classe de pseudo-gradients plus générale, que nous appelons  $L$ -transverses (où  $L > 0$ ), ainsi qu’une stratification de l’espace de pseudo-gradients adaptés associée à chaque  $L > 0$  fixé. Ces pseudo-gradients n’exigent la transversalité que sur la troncature à la *longueur*  $L$  des variétés invariantes. On mesure à l’aide de la longueur transverse au feuilletage définie par la 1-forme fermée  $\alpha$ , comme il est expliqué dans la section 2.1.3. Les notions dont on a besoin pour définir les incidences des variétés  $L$ -tronquées sont les mêmes que celles qui permettent de construire la différentielle du complexe de Morse-Novikov ; elles sont traitées dans la section 2.1.4. Les pseudo-gradients  $L$ -transverses sont introduits dans 2.1.5 et la stratification associée dans 2.2.4.

3. Un chemin générique de 1-formes présente en général des zéros de type Morse de tout indice  $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ , et pour traiter la question 0.0.1 il faut considérer de tels chemins. Deux stratégies se présentent pour définir l’invariant algébrique : soit on tient compte des glissements de tout indice, soit on montre qu’on peut se ramener à un chemin à deux indices. Ébauchons les avantages et défauts de chaque voie.

Se ramener à deux indices présente l’avantage de faciliter la définition de l’invariant. Déjà dans le cas des fonctions réelles, la machinerie algébrique nécessaire pour le définir à tout indice est assez lourde (comparer le chapitre [HW, Ch. IV] à la section [HW, Ch. V, §6]). Pour se restreindre à deux indices, on aurait besoin d’un théorème pour les 1-formes analogue à celui de la connexité de l’espace  $\mathcal{F}_i$  des fonctions à au plus deux indices critiques (voir [CL, Th. 4.1]). Ce théorème risque d’être difficile ; il faut déjà se débarrasser des zéros d’indice extrême, aussi appelés centres. On donne un premier pas dans cette direction en éliminant les centres à paramètre dans la sous-section 3.1.2. Il est important de remarquer que les théorèmes 0.0.4 et 0.0.5 s’appuient fortement sur la connexité de  $\mathcal{F}_i$  : on se ramène toujours à un chemin à deux indices.

Si on reste à tout indice, pour avoir un contrôle des intersections des variétés invariantes, on a besoin de naissances et d’éliminations  $L$ -indépendantes (section 3.1.3). Il s’agit d’une notion adaptée de celle de point critique indépendant, déjà présente dans le cadre des fonctions ([HW, Ch.I, §6]). Nous montrons dans le lemme 3.1.16 qu’il est toujours possible de se ramener à une situation avec naissances et éliminations  $L$ -indépendantes, moyennant la non-présence de centres.

Signalons pour clore ce point que, la preuve du 0.0.3 utilise une construction appelée *suspension* ([HW, Ch.I, §5]) qui permet d’augmenter la codimension des variétés invariantes les regardant dans  $M \times [-1, 1]$  : on s’éloigne des indices extrêmes autant que l’on souhaite. On ne change pas de problème vu que cette construction induit un isomorphisme  $\pi_0(\mathcal{P}_M) \equiv \pi_0(\mathcal{P}_{M \times [-1, 1]})$  comme il est affirmé dans [HW, Ch.I, §5, Rem.1] ; cependant,

la seule preuve de cet isomorphisme qui a été trouvée par l'auteur est contenue dans le volume [Ig1].

La position qui nous a semblé la plus abordable et que nous avons adoptée est celle d'attaquer le problème de définition d'un invariant en considérant les chemins à plusieurs indices, loin des extrêmes. Le travail que nous avons fait à deux indices, devrait généraliser sans beaucoup d'obstacles aux chemins à plusieurs indices loin des extrêmes en utilisant les idées dans [HW, Ch.III, §3]. Ceci reste comme projet futur.

Dans l'idée de définir une surjection semblable au morphisme  $\Sigma$  du théorème 0.0.3, nous avons fait un travail de *mise sous forme normale* d'un chemin générique de 1-formes  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ . Il s'agit du résultat principal de cette étude et nous l'énonçons ci-dessous. Il correspond au théorème 3.3.11.

**Théorème 0.0.6.** *Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin à extrémités non-singulières et à deux indices  $i, i+1$ , où  $1 < i < n-1$ . Alors il existe un chemin basé  $(\tilde{\alpha}_t, B_t^\alpha)_{t \in [0,1]}$  à deux indices  $i, i+1$  et de mêmes extrémités que  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  qui est aussi sous forme normale.*

La propriété à remarquer d'un chemin sous forme normale est qu'on peut lui associer une sorte de graphique de Cerf. Le graphique de Cerf est souvent utile pour faire des raisonnements sur des déformations de familles de fonctions. Le graphique de Cerf d'un chemin de fonctions à valeurs dans l'intervalle  $(f_t : M \rightarrow [0, 1])_{t \in [0,1]}$  est l'ensemble  $\bigcup_{t \in [0,1]} \{t\} \times f_t(\text{Crit}(f_t))$ . Si  $(f_t)_{t \in [0,1]}$  est générique et à extrémités sans point critique, son graphique de Cerf est une réunion de courbes fermées à l'intérieur de  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Une fonction que l'on peut associer naturellement à une 1-forme fermée  $\alpha$  est une primitive  $h : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ , déterminée à constante près, de la forme exacte  $\pi^*(\alpha)$ . Le graphique de Cerf dans le sens de [Ce] pour une famille de primitives  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  de  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est un sous-ensemble de  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  qui est souvent complexe : il peut être partout dense à cause de la présence de  $\sharp \pi_1 M$  points critiques de  $h_t$  pour chaque zéro de  $\alpha_t$ . On essaye d'enlever ce problème en choisissant continûment pour  $t \in [0, 1]$  des ensembles de relevés  $B_t$  des zéros de  $\alpha_t$  ; on parle donc de *chemins basés*. Ce que nous appellerons le *graphique de Cerf-Novikov* du chemin basé  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  est la réunion  $\bigcup_{t \in [0,1]} \{t\} \times h_t(B_t)$ . On verra que le graphique de Cerf-Novikov d'un chemin générique basé  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  à extrémités non-singulières, n'est pas forcément une réunion de courbes fermées. Cependant, le graphique aura cette propriété si le chemin est aussi sous forme normale, comme dans la conclusion du théorème principal. De plus, un chemin sous forme normale, aura la propriété suivante : toute paire de zéros de  $\alpha_t$  qui était née ensemble s'élimine ensemble. Ceci devrait donner une chance de définir une application à valeurs dans un certain  $K_2$ .

Pour montrer le théorème principal 3.3.11, nous avons introduit une opération que nous appelons *greffe*. Il s'agit de la construction 3.3.9 qui résulte d'une application de la version pour les 1-formes du lemme « d'unicité des naissances » de [Ce]. Ce lemme n'existait pas dans le contexte des 1-formes, mais admet une adaptation facile par  $\pi_1 M$ -équivalence (voir 2.2.14). Cette opération prend comme source deux chemins à extrémités non-singulières  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  et  $(\beta_t)_{t \in [0,1]}$  tels que  $\alpha_1 = \beta_0$  et rend un chemin générique  $\alpha_\bullet \bowtie \beta_\bullet$  qui commence en  $\alpha_0$  et finit en  $\beta_1$ . Nous atteignons le chemin  $(\tilde{\alpha}_t)_{t \in [0,1]}$  du théorème 0.0.6 par une suite finie, indexée par

$j = 1, \dots, m$ , de greffes de  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  avec des lacets  $(\beta_t^j)_{t \in [0,1]}$  tous d'origine  $\alpha_1$ .

Les lacets  $(\beta_t^j)_{t \in [0,1]}$  qui ont été construits préalablement dans 3.2.1 sont appelés *en queue d'aronde* : ils correspondent à un disque singulier  $\mathbb{D}^2$  dans  $\Omega^u$  transverse à la stratification des 1-formes, ayant l'extrémité  $\alpha_1$  du chemin initial dans son bord  $\partial\mathbb{D}^2$  et ne contenant qu'une singularité de queue d'aronde dans leur intérieur. On choisit judicieusement les lacets  $(\beta_t^j)_{t \in [0,1]}$  en fonction du chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  : il nous faut connaître la façon dont les zéros de  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  disparaissent par rapport à comment ils étaient nés. L'idée cruciale est que si on a muni  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  d'un équipement  $L$ -transverse  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$ , où  $L$  est assez grand, les variétés invariantes  $L$ -tronquées capturent cette information sur les éliminations : on a nommé cette situation *d'évolution  $L$ -normale*.

La section 3.1.1 est consacrée à positionner notre chemin générique  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  en évolution  $L$ -normale, voir la proposition 3.1.20. Moralement, on peut munir le chemin de 1-formes d'un équipement de pseudo-gradients  $L$ -transverse pour n'importe quel  $L > 0$ , mais pour que nous gardions assez d'information sur l'intersection des variétés invariantes, il ne faut pas les tronquer « trop court ». La section 1.1, en plus d'introduire les concepts algébriques pour définir le complexe de Morse-Novikov, met en place la machinerie nécessaire dans le *lemme des longueurs* (voir lemme 1.1.32) pour assurer que la longueur  $L$  est choisie suffisamment grande. Le lemme des longueurs donne une propriété fondamentale pour les chemins à deux indices, énoncée dans le *lemme du déterminant abélianisé* 3.1.21. Cette propriété se manifeste dans la proposition 3.1.22 qui est énoncée ci-dessous.

**Proposition 0.0.7.** *Soit  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin basé, à deux indices  $i, i+1$ , à extrémités non-singulières, de taille  $T > 0$  et avec  $s$  paires de zéros aux instants de Morse. Supposons que  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est d'évolution  $L$ -normale pour un équipement  $L$ -transverse  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  compatible, où  $L > (s-1)T$ .*

*Si  $t_1$  désigne un temps de pré-élimination, alors la matrice de  $L$ -incidence associée à  $\partial_{i+1}^{\xi_{t_1}}$  est « monômiale » : il s'agit d'une matrice sous la forme  $A_{t_1} = P_\sigma D$  où  $P_\sigma$  est une matrice permutation ( $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ ) et où  $D$  est une matrice diagonale dont les coefficients sont dans  $\pm \pi_1 M$ . De plus*

- *le déterminant  $\pm \det(D)$  est un produit de commutateurs de  $\pi_1 M$  et*
- *la  $u$ -longueur de tous les  $g_k \in \text{supp}(D)$  vérifie  $u(g_k) \in ]-(s-1)T, T[ \subseteq ]-L, L[$ .*

Cette proposition nous permet de bien prescrire les lacets  $(\beta_\bullet^j)_{j=1}^m$  de la greffe itérée du théorème principal.

L'équivalence de deux notions de complétion d'anneaux, l'une algébrique et l'autre topologique, est apparemment bien connue. Nous démontrons cette équivalence dans l'appendice A.1, faute d'avoir trouvé une preuve dans la littérature.



# Chapitre 1

## Algèbre

### 1.1 Anneaux de Novikov

#### 1.1.1 L'anneau de Novikov associé à un homomorphisme de groupe

Nous commençons par prendre un groupe  $G$  et un homomorphisme  $u \in H^1(G, \mathbb{R}) := \text{Hom}_{\mathbf{Gr}}(G, \mathbb{R})$  non nul. On considère  $\Lambda := \mathbb{Z}[G]$  l'anneau de groupe associé à  $G$  dont un élément  $\lambda$  s'exprime comme une somme finie des éléments  $g \in G$  à coefficients  $n_g(\lambda) \in \mathbb{Z}$  :

$$\lambda = \sum n_g(\lambda)g$$

Deux notions de base sont :

**Définition 1.1.1** (Support). *Soit  $\lambda \in \Lambda$ . On définit le support de  $\lambda$  par l'ensemble fini*

$$\text{supp}(\lambda) := \{g \in G \mid n_g(\lambda) \neq 0\} \subseteq G$$

*Le morphisme  $u$  détermine, pour tout  $C \in \mathbb{R}$ , les sous-ensembles de  $G$  suivants :*

$$G_u^{<C} := \{g \in G \mid u(g) < C\}$$

*On le notera simplement<sup>1</sup> par  $G^{<C}$ .*

*On a ainsi des définitions analogues pour  $G^{\geq C}, G^{=C} \dots$*

Faisons certaines remarques sur le support, évidentes mais importantes tout de même :

**Remarque 1.1.2.** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  éléments de l'anneau de groupe  $\Lambda$ . On a les inclusions<sup>2</sup>

$$\text{supp} \left( \sum_{i=1}^s \lambda_i \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^s \text{supp}(\lambda_i) \quad \text{et} \quad \text{supp} \left( \prod_{i=1}^s \lambda_i \right) \subseteq \prod_{i=1}^s \text{supp}(\lambda_i)$$

pouvant être strictes toutes les deux, comme on montre dans les exemples suivants.

---

1. Regarder la convention 1.1.13 pour éviter des confusions au moment de considérer le morphisme  $-u$ .

2. Comme  $\Lambda$  est non-commutatif en général, il est important de signaler que l'ordre dans lequel le produit  $\prod_{i=1}^s \lambda_i$  se réalise est  $\lambda_1 \dots \lambda_s$ .



**Exemple 1.1.3.** Soit  $G = \mathbb{Z} = \langle t \rangle$ .

1. Si  $\lambda_1 = 2t, \lambda_2 = -2t$ , on a

$$\text{supp}(\lambda_1 + \lambda_2) = \emptyset \subset \{t\} = \text{supp}(\lambda_1) \cup \text{supp}(\lambda_2)$$

2. Si  $\lambda_1 = 1 + t, \lambda_2 = 1 - t$ , on a

$$\text{supp}(\lambda_1 \lambda_2) = \{1, t^2\} \subset \{1, t, t^2\} = \text{supp}(\lambda_1) \cdot \text{supp}(\lambda_2)$$

□

Sur  $(\mathbb{Z}[[G]], +) := (\mathbb{Z}^G, +)$ , les séries formelles sur  $G$ , on a aussi la notion de support et on peut considérer le sous-groupe additif suivant

$$\mathbb{Z}[G]_u := \{ \lambda \in \mathbb{Z}[[G]] \mid \text{supp}(\lambda) \cap G^{<C} \text{ est fini pour tout } C \in \mathbb{R} \}$$

On le note très souvent par  $\Lambda_u$ .

**Lemme 1.1.4.** *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_u \times \Lambda_u & \longrightarrow & \mathbb{Z}[[G]] \\ (\lambda, \mu) & \longmapsto & \lambda\mu \end{array} \quad \text{où} \quad n_g(\lambda\mu) := \sum_{hk=g} n_h(\lambda) n_k(\mu)$$

*est bien définie et a son image dans  $\Lambda_u$ .*

*Démonstration.* Soit  $g \in G$ ; montrons d'abord que la somme qui définit  $n_g(\lambda\mu)$  est bien un nombre entier : on ne veut pas qu'il y ait une infinité de termes qui contribuent à la somme. Pour qu'un couple  $(h, k)$  y contribue, on le suppose dans  $\text{supp}(\lambda) \times \text{supp}(\mu)$ . Posons  $C := u(g) = u(hk) = u(h) + u(k)$ . Supposons par l'absurde qu'il y ait une infinité, au moins dénombrable, de termes  $(h_i, k_i)_{i \in \mathbb{N}}$  qui y contribuent. Comme  $\lambda \in \Lambda_u$ , on a en particulier que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ il existe un } h_n \in \text{supp}(\lambda) \text{ tel que } u(h_n) > n$$

Ainsi,  $u(k_n) = C - u(h_n) < C - n < C$  pour tout nombre entier positif, ce qui contredit le fait que  $\text{supp}(\mu) \cap G^{<C}$  est fini. L'application est ainsi bien définie.

On se donne maintenant un  $C \in \mathbb{R}$  et on se demande si  $\text{supp}(\lambda\mu) \cap G^{<C}$  est fini. Si ce n'était pas le cas, on aurait une infinité, au moins dénombrable de  $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$  tels que  $u(g_i) < C$ , donc de couples  $(h_i, k_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \text{supp}(\lambda) \times \text{supp}(\mu)$  tels que  $u(h_i) + u(k_i) < C$ . Le même raisonnement que nous avons fait précédemment permet de conclure. □

Cette application, d'élément neutre  $1_{\Lambda_u} = 1 \cdot 1_G$  où  $1_G$  désigne le neutre<sup>3</sup> de  $G$ , définit un produit compatible avec la somme.

**Définition 1.1.5.** *L'anneau  $(\Lambda_u, +, \cdot)$  est appelé l'anneau de Novikov associé au couple  $(G, u)$ .*

---

3. Dans la suite, on notera 1 pour se référer au neutre de  $G$ .

Du fait que ce dernier étend les opérations de l'anneau de groupe,  $\Lambda$  est un sous-anneau de  $\Lambda_u$  qui n'est commutatif que si  $G$  est abélien.

**Remarque 1.1.6.** Les propriétés du support que nous avons relevées dans la remarque 1.1.2 sont tout aussi valables pour l'anneau de Novikov grâce aux définitions de la somme et du produit dans  $\Lambda_u$ . Les inclusions sont en général strictes, et l'exemple 1.1.3 suffit du fait que  $\Lambda \subseteq \Lambda_u$ .

**Définition 1.1.7.** Si  $\lambda \in \Lambda_u^* := \Lambda_u \setminus \{0\}$ , on définit l'ensemble de longueurs de  $\lambda$  par

$$L_\lambda^u := \{u(g) \mid g \in \text{supp}(\lambda)\}$$

On le notera par  $L_\lambda$  (voir la convention 1.1.13).

Il est évident que l'ensemble de longueurs d'un élément de l'anneau de Novikov est minoré.

**Lemme 1.1.8.** Si  $\lambda \in \Lambda_u^*$ , l'ensemble de longueurs  $L_\lambda$  contient sa borne inférieure et est discret.

*Démonstration.* Soit  $m := \inf(L_\lambda)$  et supposons que  $m \notin L_\lambda$ . Fixons  $\varepsilon_1 > 0$ , on a ainsi qu'il existe  $h_1 \in L_\lambda \cap ]m, m + \varepsilon_1[$ . On définit ainsi par récurrence, pour tout  $n \geq 1$  les  $\varepsilon_{n+1} := h_n - m > 0$ , où  $h_n$  est pris au hasard dans  $L_\lambda \cap ]m, m + \varepsilon_n[$ . Clairement  $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et en particulier, les  $h_n$  sont tous différents. On a ainsi que  $\text{supp}(\lambda) \cap G^{< m + \varepsilon_1}$  n'est pas fini. Contradiction.

La même idée permet de déduire que  $L_\lambda$  n'a pas de point d'accumulation. □

Nous pouvons ainsi définir :

**Définition 1.1.9.** L'application  $\nu_u : \Lambda_u \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  donnée par

$$\nu_u(\lambda) := \begin{cases} \min L_\lambda & \text{si } \lambda \neq 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

est appelée *valuation naturelle* de  $\Lambda_u$ .

On enlèvera l'indice relatif au morphisme  $u$  dans la suite.

**Lemme 1.1.10.** La valuation  $\nu$  de 1.1.9 vérifie,

1.  $\nu(\lambda + \mu) \geq \min\{\nu(\lambda), \nu(\mu)\}$ ,
2.  $\nu(\lambda\mu) \geq \nu(\lambda) + \nu(\mu)$

et ce pour tous  $\lambda, \mu \in \Lambda_u$ .

*Démonstration.* La première résulte de l'inclusion  $\text{supp}(\lambda + \mu) \subseteq \text{supp}(\lambda) \cup \text{supp}(\mu)$ . Si l'inclusion est stricte, l'inégalité le sera aussi.

La deuxième résulte du fait que si  $g \in \text{supp}(\lambda\mu)$ , il existe un couple  $(h, k) \in \text{supp}(\lambda) \times \text{supp}(\mu)$  tel que  $g = hk$ . Ainsi,  $u(g) = u(h) + u(k) \geq \nu(\lambda) + \nu(\mu)$  et on obtient la propriété cherchée. □

On n'a pas les égalités en général :

**Exemple 1.1.11.** Soit  $G$  un groupe contenant  $g$  un élément  $n$ -nilpotent et  $t$  sans torsion. Soit  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  un homomorphisme tel que  $u(t) = 1$ . Nécessairement  $u(g) = 0$ . Voyons que nous n'avons pas les égalités dans 1.1.10.

1. Prenons  $\lambda = t + t^2, \mu = -t$ .  
Ainsi  $\lambda + \mu = t^2$  et  $\nu(\lambda + \mu) = 2 > 1 = \min\{\nu(\lambda), \nu(\mu)\}$
2. Prenons  $\lambda = tg^{n-1} + t^2, \mu = gt$ .  
Ainsi  $\lambda\mu = t^2gt$  et  $\nu(\lambda\mu) = 3 > 2 = \nu(\lambda) + \nu(\mu)$

□

De même que le morphisme  $u$  découpe le groupe  $G$  en sous ensembles, la valuation associée découpe  $\Lambda_u$  en sous-ensembles :

**Définition 1.1.12.** Soit  $\nu : \Lambda_u \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  comme dans 1.1.9.

On dit qu'un terme  $\lambda \in \Lambda_u$  est  $\nu$ -positif si  $\nu(\lambda) > 0$ . On note l'ensemble d'éléments  $\nu$ -positifs/négatifs respectivement par

$$(\nu > 0) := \nu^{-1}([0, \infty]) \quad \text{et} \quad (\nu < 0) := \nu^{-1}(]-\infty, 0])$$

On définit de la même façon l'ensemble d'éléments  $\nu$  - (plus grands/petits qu'un certain  $L \in \mathbb{R}$ ).

**Convention 1.1.13.**

Nous aurons souvent besoin de « compléter de l'autre côté », c'est-à-dire de considérer  $\Lambda_{-u}$  pour un  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  donné (voir la proposition 1.1.14 pour attribuer un sens au mot *compléter*). On manipule habituellement l'anneau  $\Lambda_{-u}$  en regardant les notions associées au morphisme  $-u$  en termes du morphisme  $u$ . On écrit la forme qui prennent les notions que nous avons introduites ci-dessous :

$$G_{-u}^{<C} = G_u^{>-C}$$

Dans la suite, si on ne précise pas l'homomorphisme,  $G^{<C}, G^{\geq C} \dots$  noteront ceux définis par  $+u$ . On voit l'anneau  $\Lambda_{-u}$  comme

$$\mathbb{Z}[G]_{-u} := \{ \lambda \in \mathbb{Z}[[G]] \mid \text{supp}(\lambda) \cap G_u^{>C} \text{ est fini pour tout } C \in \mathbb{R} \}$$

L'ensemble de longueurs d'un  $\lambda \in \Lambda_{-u}^*$  est toujours borné inférieurement, et on a la relation

$$L_{\lambda}^{-u} = -L_{\lambda}^u$$

les longueurs (vues par  $u$ !) sont majorées et la valuation vérifie

$$\nu_{-u} : \Lambda_{-u} \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \text{ est donnée par } \nu(\lambda) := \begin{cases} \min L_{\lambda}^{-u} = -\max L_{\lambda}^u & \text{si } \lambda \neq 0 \\ +\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Dans la pratique, il est plus naturelle de travailler directement avec la  $u$ -valuation, même si on est devant l'anneau  $\Lambda_{-u}$ . Ceci nous conduit à introduire l'application  $\nu_u : \Lambda_{-u} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  donnée par

$$\nu_u(\lambda) := \begin{cases} \max L_\lambda^u & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

Clairement  $\nu_{-u} = -\nu_u$  et si on prend la convention  $\nu := \nu_u$  quand on n'écrit pas le sous-indice, les propriétés de  $\nu : \Lambda_{-u} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  deviennent :

1.  $\nu(\lambda + \mu) \leq \max\{\nu(\lambda), \nu(\mu)\}$
2.  $\nu(\lambda\mu) \leq \nu(\lambda) + \nu(\mu)$

□

On a introduit tous les concepts dont on a besoin pour manier les anneaux de Novikov. On peut conclure par :

**Proposition 1.1.14.** *Il existe une ultramétrie  $\|\cdot\|$  pour l'anneau  $\Lambda$  dont la complétion  $\widehat{\Lambda_{\|\cdot\|}}$  est l'anneau de Novikov  $\Lambda_u$ .*

*De plus l'anneau  $\Lambda_u$  est isomorphe comme anneau topologique à la complétion induite par la  $u$ -filtration de  $\Lambda$ .*

*Démonstration.* Les preuves de ces faits sont dans l'appendice A.1 (voir les lemmes A.1.14, A.1.15, A.1.19 et la proposition A.1.17). □

**Remarque 1.1.15.** Ceci exhibe l'équivalence de deux complétions de l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}[G]$ , différentes a priori, et qui sont identifiées habituellement (cf. par exemple [Lat, Not. 1.6] et [Si2, Def. 1.1]) sans apporter une preuve formelle de leur équivalence.

## 1.1.2 Troncatures

**Définition 1.1.16.** *Soit  $H \in \mathbb{R}$ . On appelle  $H$ -troncature l'application*

$$\begin{aligned} \text{tr}_H : \Lambda_u &\longrightarrow \Lambda \\ \lambda &\longmapsto \sum_{g \in \text{supp}(\lambda) \cap G^{\leq H}} n_g(\lambda)g \end{aligned}$$

*Ainsi, donné un  $\lambda \in \Lambda_u$ , on peut toujours l'écrire comme*

$$\lambda = \text{tr}_H(\lambda) + \mu, \quad \text{où } \mu \in (\nu > H)$$

*On exprime ce fait avec la notation*

$$\lambda = \text{tr}_H(\lambda) + (\nu > H)$$

Cette application se comporte de façon semblable à celle des développements limités :

**Lemme 1.1.17.** *L'application  $\text{tr}_H$  a les propriétés suivantes :*

1.  $\text{tr}_H(\lambda + \mu) = \text{tr}_H(\lambda) + \text{tr}_H(\mu), \forall \lambda, \mu \in \Lambda_u$

$$2. \operatorname{tr}_H(\lambda\mu) = \operatorname{tr}_H(\operatorname{tr}_{H-\nu(\mu)}(\lambda) \operatorname{tr}_{H-\nu(\lambda)}(\mu)), \forall \lambda, \mu \in \Lambda_u$$

*Démonstration.* La première propriété est évidente. Voyons la deuxième :

Les éléments qui contribuent au support du membre de droite font partie évidemment du support de membre de gauche. Réciproquement, si  $g \in \operatorname{supp}(\lambda\mu) \cap G^{\leq H}$ , son coefficient s'écrit comme

$$0 \neq n_g(\lambda\mu) = \sum_{hk=g} n_h(\lambda) n_k(\mu)$$

Ceci entraîne que  $u(h) + u(k) = u(g) \leq H$  mais comme  $h \in \operatorname{supp}(\lambda)$  on a que  $\nu(\lambda) \leq u(h)$  et on obtient  $\nu(\lambda) + u(k) \leq H$ , d'où  $u(k) \leq H - \nu(\lambda)$ .

De même, on a  $u(h) \leq H - \nu(\mu)$ , et  $h, k$  apparaissent dans les supports mentionnés dans le membre de droite. La dernière  $H$ -troncature à droite voit toujours cet élément  $hk$  du support de  $\operatorname{tr}_{H-\nu(\mu)}(\lambda) \operatorname{tr}_{H-\nu(\lambda)}(\mu)$  du fait que  $hk = g \in G^{\leq H}$ .

□

**Exemple 1.1.18.** Soit  $G = \mathbb{Z} = \langle t \rangle$  et  $u \in \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$  tel que  $u(t) = 1$ . Alors  $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  et  $\Lambda_u = \mathbb{Z}[t^{-1}, t]$ .

Posons

$$\lambda = t^{-1} - \sum_{n=0}^{\infty} t^n = t^{-1} - 1 - t - t^2 - \dots$$

et

$$\mu = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+3)t^n = t^{-2} + 2t^{-1} + 3 + 4t + \dots$$

Le produit  $\lambda\mu$  est de proche en proche :

$$\begin{aligned} \lambda\mu &= \begin{array}{cccccc} t^{-3} & +2t^{-2} & +3t^{-1} & +4 & +5t & \dots \\ & -t^{-2} & -2t^{-1} & -3 & -4t & \dots \\ & & -t^{-1} & -2 & -3t & \dots \\ & & & -1 & -2t & \dots \\ & & & & -t & \dots \end{array} = \\ &= \begin{array}{cccccc} t^{-3} & +t^{-2} & & & & \\ & & & -2 & -5t & \dots \end{array} \end{aligned}$$

et donc, si on pose  $H = 1$  on a  $\operatorname{tr}_1(\lambda\mu) = t^{-3} + t^{-2} - 2 - 5t$

Comme  $\nu(\lambda) = u(r(\lambda)) = u(t^{-1}) = -1$  et  $\nu(\mu) = -2$ , on considère

$$\operatorname{tr}_{1-(-2)}(\lambda) = t^{-1} - 1 - t - t^2 - t^3$$

et

$$\operatorname{tr}_{1-(-1)}(\mu) = t^{-2} + 2t^{-1} + 3 + 4t + 5t^2$$

Dans le produit  $\operatorname{tr}_3(\lambda) \operatorname{tr}_2(\mu)$  on voit apparaître **tous** les termes qui restent dans la première troncature, ainsi que d'autres dont la  $u$ -valuation est plus grand que  $H = 1$ , que nous faisons disparaître en prenant la troncature  $\operatorname{tr}_1(\operatorname{tr}_3(\lambda) \operatorname{tr}_2(\mu))$ . □

Si on se demande sur les valeurs de  $H \in \mathbb{R}$  tels que la troncature  $\text{tr}_H(\lambda)$  d'un certain  $\lambda \in \Lambda_u$  non-nul gardent encore une information sur  $\lambda$ , on s'aperçoit rapidement que pour des  $H$  inférieures à  $\nu(\lambda)$ , la troncature  $\text{tr}_H(\lambda)$  est nulle. La valeur minimale où la troncature dit encore quelque chose sur  $\lambda$  est sa valuation.

Ainsi, tout élément non-nul d'un anneau de Novikov  $\Lambda_u$  se décompose naturellement comme suit :

**Définition 1.1.19** (Décomposition racine/tronc). *Soit  $\lambda \in \Lambda_u$  non-nul; on a  $\lambda = r(\lambda) + t(\lambda)$  où*

1. *La racine de  $\lambda$  est  $r(\lambda) := \text{tr}_{\nu(\lambda)}(\lambda) = \sum_{g \in G^{\nu(\lambda)}} n_g(\lambda)g \in \Lambda$*
2. *Le tronc de  $\lambda$  est  $t(\lambda) := \lambda - r(\lambda) = \sum_{g \in G^{>\nu(\lambda)}} n_g(\lambda)g \in (\nu > \nu(\lambda))$*

**Remarque 1.1.20.** Si on complète l'anneau de groupe « de l'autre côté », en changeant  $u$  en  $-u$ , on obtient la formule

$$\text{tr}_H(\lambda) = \sum_{g \in \text{supp}(\lambda) \cap G^{\geq -H}} n_g(\lambda)g$$

et, compte tenu de la convention 1.1.13, la deuxième propriété du lemme 1.1.10 devient

$$\text{tr}_H(\lambda\mu) = \text{tr}_H(\text{tr}_{H+\nu(\mu)}(\lambda) \text{tr}_{H+\nu(\lambda)}(\mu))$$

En suivant la convention 1.1.13 un élément  $\lambda \in \Lambda_{-u}$  s'écrit comme

$$\lambda = \text{tr}_H(\lambda) + (\nu < -H)$$

### 1.1.3 Abélianisation et Déterminants

L'anneau  $\Lambda_u$  n'est commutatif que si le groupe associé l'est aussi. On ne peut pas prendre le déterminant d'une matrice  $A \in \text{Mat}_s(\Lambda_u)$ . Nous introduisons une version abélianisée :

**Définition 1.1.21.** *L'abélianisé du groupe  $G$  est le quotient de  $G$  par  $[G, G]$ , le sous-groupe dérivé<sup>4</sup> de  $G$ , engendré par les commutateurs de  $G$  :*

$$G_{\text{ab}} := \frac{G}{[G, G]}$$

*Il s'agit d'un groupe abélien vérifiant la propriété universelle de factoriser de façon unique tout morphisme de groupes  $f : G \rightarrow A$  où  $A$  est abélien, par la projection « abélianisation »  $\text{ab} : G \rightarrow G_{\text{ab}}$  :*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & A \\ & \searrow \text{ab} & \nearrow \exists! \\ & G_{\text{ab}} & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ f_{\text{ab}} \end{array}$$

---

4. Ce sous-groupe est distingué, en particulier parce qu'il est caractéristique (invariant par les automorphismes de  $G$ ).

En particulier notre morphisme  $u \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$  se factorise uniquement comme  $u = u_{\text{ab}} \circ \text{ab}$ . On notera parfois les abélianisés par  $g' := \text{ab}(g)$ .

On peut travailler dans les anneaux de groupe des abélianisés grâce au lemme suivant.

**Lemme 1.1.22.** Notons  $\Lambda_{\text{ab}} := \mathbb{Z}[G_{\text{ab}}]$ . L'abélianisation induit un morphisme d'anneaux dit d'abélianisation

$$\text{ab} : \Lambda \rightarrow \Lambda_{\text{ab}}$$

*Démonstration.* Si  $\lambda = \sum n_g(\lambda)g$ , il suffit de définir

$$\text{ab}(\lambda) := \sum n_g(\lambda)g'$$

Il est classique de montrer que  $\text{ab}$  est un morphisme d'anneaux (cf. [Lan, Ch.II, Prop.3.1]). On emploiera parfois la notation  $\lambda'$  pour désigner  $\text{ab}(\lambda)$ .  $\square$

De même que nous avons considéré la complétion de l'anneau de groupe  $\Lambda$  par  $u$ , on peut s'intéresser à

**Définition 1.1.23.** L'anneau de Novikov abélianisé associé au couple  $(G, u)$  est défini comme l'anneau de Novikov associé au couple  $(G_{\text{ab}}, u_{\text{ab}})$ .

Avec les notations précédentes, on parle de

$$\Lambda_{u_{\text{ab}}} := \mathbb{Z}[G_{\text{ab}}]_{u_{\text{ab}}}$$

Il est muni de sa valuation  $\nu_{u_{\text{ab}}}$  que l'on notera simplement par  $\nu_{\text{ab}}$  sauf confusion possible.

**Lemme 1.1.24.** Le morphisme d'abélianisation  $\text{ab} : G \rightarrow G_{\text{ab}}$  induit un morphisme d'anneaux surjectif

$$\text{ab} : \Lambda_u \rightarrow \Lambda_{u_{\text{ab}}}$$

dit aussi d'abélianisation et qui étend le morphisme abélianisation du lemme 1.1.22.

*Démonstration.* On le définit de la même manière : si  $\lambda = \sum n_g(\lambda)g$ , on pose

$$\begin{aligned} \text{ab} : \Lambda_u &\longrightarrow \mathbb{Z}[[G_{\text{ab}}]] \\ \lambda &\longmapsto \sum n_g(\lambda)g' \end{aligned}$$

dont l'image est contenue dans  $\Lambda_{u_{\text{ab}}}$  : soit  $C \in \mathbb{R}$  et considérons l'ensemble

$$\text{supp}(\text{ab}(\lambda)) \cap (G_{\text{ab}})^{<C} = \{g'_i\}_{i \in I}$$

grâce à l'inclusion de la remarque 1.1.25 qui suit ce lemme, on a une famille  $\{g'_i\}_{i \in I} \subseteq \text{supp}(\lambda)$  qui vérifie  $u(g'_i) = u_{\text{ab}}(g'_i) < C$ . La famille du départ est alors contrainte à être finie du fait que l'on a pris  $\lambda \in \Lambda_u$ .

La surjectivité est triviale vu la définition de  $\text{ab}$ .  $\square$

À nouveau, une relation d'inclusion éventuellement stricte apparaît :

**Remarque 1.1.25.** Soit  $\lambda \in \Lambda_u$ . De façon générale<sup>5</sup> on a

$$\text{supp}(\text{ab}(\lambda)) \subseteq \text{ab}(\text{supp}(\lambda)) \quad \text{et} \quad \nu_{\text{ab}}(\lambda') \geq \nu(\lambda)$$

Ceci découle du fait que  $\lambda'$  s'écrit

$$\lambda' = \sum_{g \in \text{supp}(\lambda)} n_g(\lambda) g'$$

ainsi, le coefficient de  $g'$  n'est rien d'autre que la somme des coefficients dans la fibre  $\text{ab}^{-1}(g') = g[G, G]$ . Autrement dit

$$n_{g'}(\lambda') = \sum_{h \in g[G, G]} n_h(\lambda)$$

et rien n'empêche à cette somme d'être nulle. En tout cas, si  $g'$  est dans le support de  $\lambda'$ , la dernière somme n'est pas nulle, ce qui entraîne l'existence d'au moins un  $h \in g[G, G]$  dans le support de  $\lambda$ . Ceci montre l'inclusion annoncée.

En particulier on obtient l'inclusion entre les ensembles de longueurs associées :

$$\begin{aligned} L_{\lambda'}^{u_{\text{ab}}} &= \{u_{\text{ab}}(g') \mid g' \in \text{supp}(\lambda')\} \subseteq \{u_{\text{ab}}(\text{ab}(g)) \mid g \in \text{supp}(\lambda)\} = \\ &= \{u(g) \mid g \in \text{supp}(\lambda)\} = L_{\lambda}^u \end{aligned}$$

et donc  $\nu_{\text{ab}}(\lambda') = \min L_{\lambda'}^{u_{\text{ab}}} \geq \min L_{\lambda}^u = \nu(\lambda)$

**Exemple 1.1.26.** Soit  $G$  le groupe libre à trois générateurs  $g, h, k$ . Considérons l'élément  $\lambda := 2gh - 2hg + k \in \Lambda$ , dont le support est  $\{gh, hg, k\}$ . L'abélianisé de  $\lambda$  est  $\text{ab}(\lambda) = k'$  et donc

$$\text{supp}(\text{ab}(\lambda)) = \{k'\} \subsetneq \{(gh)', k'\} = \text{ab}(\{gh, hg, k\}) = \text{ab}(\text{supp}(\lambda))$$

□

Vu que les opérations somme et produit des anneaux de matrices sont définies coordonnée à coordonnée par des sommes et multiplications d'éléments de l'anneau et en vertu du lemme 1.1.24, on peut affirmer :

**Lemme 1.1.27.** Soit  $u \in \text{Hom}(G, \mathbb{R})$  non-nul. L'abélianisation  $\text{ab} : G \rightarrow G_{\text{ab}}$  induit des morphismes surjectifs entre les anneaux de matrices

$$\text{ab} : \text{Mat}_s(\Lambda_u) \rightarrow \text{Mat}_s(\Lambda_{u_{\text{ab}}})$$

pour tout  $s$  entier positif.

*Démonstration.*

□

On peut enfin définir le déterminant abélianisé comme suit.

---

5. Attention, bien que l'inclusion ne change pas de sens quand on considère la complétion  $\Lambda_{-u}$ , l'inégalité faisant intervenir les valuations change de sens par les mêmes raisons que dans 1.1.13.



**Définition 1.1.28.** On note par  $\det_{\text{ab}}$  le déterminant abélianisé, résultant de la composée :

$$\det_{\text{ab}} : \text{Mat}_s(\Lambda_u) \xrightarrow{\text{ab}} \text{Mat}_s(\Lambda_{u_{\text{ab}}}) \xrightarrow{\det} \Lambda_{u_{\text{ab}}}$$

Si  $A \in \text{Mat}_s(\Lambda_u)$ , et  $A' := \text{ab}(A)$  on a l'expression usuelle

$$\det_{\text{ab}}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \left( (-1)^\sigma \prod_{i=1}^s A'_{\sigma(i)i} \right)$$

**Remarque 1.1.29.**

Soit  $A = (A_{ij}) \in \text{Mat}_s(\Lambda_u)$  et  $A' = (A'_{ij})$  son abélianisée. On a

$$\text{supp}(\det_{\text{ab}}(A)) \subseteq \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \left( \prod_{i=1}^s \text{supp}(A'_{\sigma(i)i}) \right)$$

où l'inclusion peut être stricte. Il suffit d'appliquer la remarque 1.1.6 à l'anneau  $\Lambda_{u_{\text{ab}}}$  pour se convaincre de cette affirmation.

### 1.1.4 Lemme des longueurs

Ce paragraphe considère des complétions avec le morphisme  $-u$ , vu que ce sera sous cette forme que nous l'utiliserons dans le contexte géométrique. On rappelle que si  $L \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \Lambda_{-u}$  on a

$$\text{tr}_L(\lambda) = \sum_{g \in \text{supp}(\lambda) \cap G^{\geq -L}} n_g(\lambda)g \quad \text{et} \quad \lambda = \text{tr}_L(\lambda) + (\nu < -L).$$

Le lemme 1.1.32, appelé *des longueurs*, fournit une condition suffisante sur la longueur de troncature  $L$  d'une matrice  $B$  à coefficients dans un anneau de Novikov, pour que la partie positive des déterminants de la matrice tronquée  $\text{tr}_L(B)$  et de la matrice originale coïncident ; comparer à la remarque 1.1.33. Il s'agit d'un outil important de cette étude : il permettra de savoir avec quelle finesse on doit équiper un chemin de 1-formes à deux indices pour garder un renseignement sur la façon dont les zéros s'éliminent dans 3.1.22.

**Lemme 1.1.30.** Soit  $A \in \text{Mat}_s(\Lambda_{-u})$  et  $\nu_u : \Lambda_{-u} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  comme dans 1.1.13. Alors

$$\nu_{\text{ab}}(\det_{\text{ab}}(A)) \leq \max_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \sum_{i=1}^s \nu_{\text{ab}}(A'_{\sigma(i)i})$$

*Démonstration.* Il suffit de tenir compte des propriétés de la valuation (voir 1.1.13), de la définition 1.1.23 d'anneau de Novikov abélianisé et de la remarque 1.1.29.  $\square$

**Définition 1.1.31.** Soit  $B = (B_{ij}) \in \text{Mat}_s(\Lambda_{-u})$ . On définit sa positivité comme

$$\text{pos}(B) := \max \{0, \nu(B_{ij})\}$$

**Lemme 1.1.32** (Des longueurs). *Soit  $B$  une matrice de taille  $s \times s$  à coefficients dans  $\Lambda_{-u}$ . Notons  $P' := \text{pos}(B')$  la positivité de la matrice abélianisée de  $B$ .*

*Si  $L \geq (s-1)P'$ , on a*

$$\det_{\text{ab}}(B) = \det_{\text{ab}}(\text{tr}_L(B)) + (\nu_{\text{ab}} < 0)$$

*Démonstration.* On peut comprendre l'énoncé en se posant la question suivante : existe-t-il une longueur de troncature  $L$  telle que les termes  $u_{\text{ab}}$ -positifs du déterminant de  $B$  soient captés par le déterminant de la matrice tronquée  $\text{tr}_L(B)$  ? La réponse fournie par le lemme est « oui, à condition de prendre  $L$  assez grand ».

Soit ainsi un  $z \in \text{supp}(\det_{\text{ab}}(B))$  avec  $u_{\text{ab}}(z) \geq 0$  ; grâce à la remarque 1.1.29, il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_s$  et des  $b_{\sigma(i)i} \in \text{supp}(B_{\sigma(i)i})$  tels que

$$z = \prod_{i=1}^s b'_{\sigma(i)i} \quad \text{où} \quad b'_{\sigma(i)i} = \text{ab}(b_{\sigma(i)i}) \in \text{supp}(B'_{\sigma(i)i}) \quad (1.1.1)$$

Le choix de  $z$  dit que

$$0 \leq u_{\text{ab}}(z) = \sum_{i=1}^s u_{\text{ab}}(b'_{\sigma(i)i}) = \sum_{i=1}^s u(b_{\sigma(i)i})$$

Soyons naïfs et prenons  $L = 0$ . Il se peut bien que certains des  $b'_{\sigma(i)i}$  soient  $u_{\text{ab}}$ -négatifs ou, de façon équivalente, que certains  $b_{\sigma(i)i}$  soient  $u$ -négatifs. Si  $b_{\sigma(i)i}$  est  $u$ -négatif, il ne ferait pas partie du support de  $\text{tr}_0(B)$ . Ainsi le terme  $z$  n'apparaîtrait pas dans le support de  $\det_{\text{ab}}(\text{tr}_0(B))$ . Mais les  $b'_{\sigma(i)i}$  ne peuvent pas être très  $u_{\text{ab}}$ -négatifs, puisque nous avons

$$\min_{i=1}^s u_{\text{ab}}(b'_{\sigma(i)i}) \geq -(s-1)P' \quad (1.1.2)$$

et ce, du fait que pour tout  $i_0 \in \{1, \dots, s\}$  :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_{\text{ab}}(z) &= u_{\text{ab}}\left(\prod_{i=1}^s b'_{\sigma(i)i}\right) \leq \overbrace{P' + \dots + P'}^{i_0-1} + u_{\text{ab}}(b'_{\sigma(i_0)i_0}) + \overbrace{P' + \dots + P'}^{s-i_0} = \\ &= (s-1)P' + u_{\text{ab}}(b'_{\sigma(i_0)i_0}) \end{aligned}$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ , comme  $u_{\text{ab}}(b'_{\sigma(i)i}) = u(b_{\sigma(i)i})$ ,  $b_{\sigma(i)i}$  est aussi  $u$ -minoré par  $-(s-1)P'$ . Ainsi, si on prend  $L \geq (s-1)P'$ , grâce à (1.1.2) on a en particulier  $u(b_{\sigma(i)i}) \geq -L$  et par définition de la  $L$ -troncature (voir 1.1.20),  $b_{\sigma(i)i}$  est dans le support de la troncature  $\text{tr}_L(B_{\sigma(i)i})$ . Au vu de (1.1.1), tous les éléments  $u_{\text{ab}}$ -positifs du support de  $\det_{\text{ab}}(B)$  apparaissent à partir des termes  $\text{tr}_L(B_{\sigma(i)i})$  – et donc de ceux de la matrice  $\text{tr}_L(B)$  – ce qui permet de conclure.  $\square$

**Remarque 1.1.33.** Du lemme 1.1.32, on peut déduire l'expression suivante pour les matrices carrées de dimension  $(s \times s)$ , dès que  $L \geq (s-1)\text{pos}(B')$  :

$$\text{tr}_0(\det_{\text{ab}}(B)) = \text{tr}_0(\det_{\text{ab}}(\text{tr}_L(B)))$$

On écrit le corollaire suivant, qui n'est qu'une version affaiblie du lemme des longueurs.

**Corollaire 1.1.34.** *Soit  $B$  une matrice de taille  $s \times s$  à coefficients dans  $\Lambda_{-u}$ . Notons  $P := \text{pos}(B)$  sa positivité.*

*Il suffit de prendre  $L \geq (s-1)P$  pour qu'on ait*

$$\det_{\text{ab}}(B) = \det_{\text{ab}}(\text{tr}_L(B)) + (\nu_{\text{ab}} < 0)$$

*Démonstration.* Cela découle immédiatement du fait que  $\text{pos}(B) \geq \text{pos}(B')$  grâce à la remarque 1.1.25.  $\square$

### 1.1.5 Inversibilité

**Lemme 1.1.35.** *Soit  $\lambda \in \Lambda_u$ . Sa décomposition « racine-tronc » est  $\lambda = r + t$  (voir déf. 1.1.19). Supposons  $r \in \mathbb{Z}[G]^\times$  et appelons  $\bar{r}$  son inverse. Alors  $\lambda \in \Lambda_u^\times$ , et son inverse est donné par*

$$\lambda^{-1} = \bar{r} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-t\bar{r})^n \right) = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-\bar{r}t)^n \right) \bar{r} = \bar{r} - \bar{r}t\bar{r} + \bar{r}t\bar{r}t\bar{r} - \dots$$

*Démonstration.* D'abord, on doit justifier que les séries qui apparaissent dans l'énoncé convergent vers un élément de  $\Lambda_u$ . Il est clair que si une suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\lambda_n) = +\infty$ , la  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n$  définit un élément de  $\Lambda_u$  du fait que pour tout  $C \in \mathbb{R}$ , il n'y a qu'un nombre fini d'éléments dans  $g$  dans le support de la somme avec  $u(g) < C$ .

Ainsi, posons  $\lambda_n := (-t\bar{r})^n$ . On a  $\nu(\lambda_n) \geq n\nu(-t\bar{r}) = n(\nu(t) - \nu(r)) = nD$  où  $D$  est une constante positive qui dépend de  $\lambda$ . Or  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(\lambda_n) = +\infty$  et la série converge.

Maintenant, on peut faire le calcul, où  $\mu$  représente la première somme

$$\begin{aligned} \lambda\mu &= (r+t)\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t\bar{r})^n + t\bar{r} \sum_{n=0}^{+\infty} (-t\bar{r})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t\bar{r})^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (-t\bar{r})^{n+1} = \\ &= (-t\bar{r})^0 = 1 \\ \mu\lambda &= \mu(r+t) = \bar{r} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-t\bar{r})^n \right) r + \bar{r} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} (-t\bar{r})^n \right) t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-\bar{r}t)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (-\bar{r}t)^{n+1} \\ &= (-\bar{r}t)^0 = 1 \end{aligned}$$

En effet, on aurait pu ne vérifier qu'un de deux derniers produits du fait que  $\mathbb{Z}[G]$  est stablement fini (voir [Si2, 1.9]).  $\square$

On renvoie à A.2.4 où on donne une autre justification de l'inversibilité de certains éléments des anneaux de Novikov, appelés unités triviales dans la littérature.

## 1.2 Matrices élémentaires et auto-élémentaires

Considérons le couple  $(\Lambda_{-u}, \nu)$  où  $\nu : \Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  (cf. dans 1.1.13). On remarque que si  $\lambda \in (\nu < 0)$ , l'élément  $1 + \lambda$  est inversible dans  $\Lambda_{-u}$  comme on a vu dans 1.1.35.

**Définition 1.2.1.** Soit  $r \in \mathbb{N}^*$ . Désignons par  $\mathrm{GL}(r, \Lambda_{-u})$  le groupe des matrices inversibles de taille  $r$  à coefficients dans l'anneau  $\Lambda_{-u}$ . Soit  $\mathrm{EA}(r, \Lambda_{-u}) \trianglelefteq \mathrm{GL}(r, \Lambda_{-u})$  le sous-groupe normal engendré par les matrices  $E_{ij}^\lambda := \mathrm{Id}_r + T_{ij}^\lambda$  où  $T_{ij}^\lambda$  est la matrice avec un seul terme non-nul, égal à  $\lambda$  sur la place  $ij$  vérifiant :

1. si  $i \neq j, \lambda \in \Lambda_{-u}$ , et  $E_{ij}^\lambda := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{j} \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\boxed{i}}$  est dite élémentaire,
2. si  $i = j, \lambda \in (\nu < 0)$ , et  $E_{ii}^\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \boxed{i} & 0 \\ 0 & 1 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\boxed{i}}$  est dite auto-élémentaire.

Ces matrices apparaissent de façon naturelle dans notre étude quand on s'intéresse à des familles à un paramètre génériques de pseudo-gradients adaptés, comme on peut constater en lisant l'énoncé de la proposition [2.2.36](#). Les accidents qu'un tel chemin rencontre sont associées à une orbite reliant deux zéros de même indice.



# Chapitre 2

## Géométrie et topologie

On travaille sur une variété compacte  $M$  de dimension  $n + 1$ . Les cartes, si besoin, sont notées par  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . On note l'espace de sections d'un fibré  $E$  sur  $M$  par  $\Gamma(E)$ . Pour un fibré vectoriel  $E$ , on note les zéros d'une section  $\alpha$  de  $E$  par  $Z(\alpha)$ . Une classe de cohomologie de De Rham non-nulle  $u \in H_{\text{dR}}^1(M; \mathbb{R}) \setminus \{0\}$  est fixée une fois pour toutes. On désigne les 1-formes fermées par

$$\mathcal{Z} := \{\alpha \in \Gamma(TM^*) \mid d\alpha = 0\}$$

et celles dans la classe  $u$  par :

$$\Omega^u := \{\alpha \in \mathcal{Z} \mid [\alpha]_{\text{dR}} = u\}$$

### 2.1 Formes équipées

#### 2.1.1 Formes de Morse, de naissance-élimination et de queue d'aronde

**Définition 2.1.1.** Soit  $f$  une primitive locale de  $\alpha$  au voisinage de  $p$ . S'il existe des coordonnées locales  $(U, \varphi)$  autour de  $p$  telles que :

- a)  $(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_{n+1}) = -x_1^2 + \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_{n+1}^2$ ,  
 $p$  est dit de type Morse ;
- b)  $(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_{n+1}) = -x_1^2 + \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 + x_{n+1}^3$ ,  
 $p$  est dit de type naissance/élimination ;
- c)  $(f \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_{n+1}) = -x_1^2 + \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 \pm x_{n+1}^4$ ,  
 $p$  est dit de type queue d'aronde.

Dans le deux premiers cas, l'indice de  $p$  est  $i$ . Dans le dernier,  $p$  est d'indice  $i$  ou  $i + 1$  selon que le signe du terme  $x_{n+1}^4$  soit respectivement  $+$ ,  $-$ .  
Dans tous les cas on dira que les coordonnées sont adaptées à  $\alpha$  en  $p$ .

**Définition 2.1.2.** Soit  $\alpha \in \Gamma(T^*M)$  une 1-forme fermée,  $p \in Z(\alpha)$  un de ses zéros et  $f$  une primitive locale de  $\alpha$  en  $p$ . Désignons l'idéal des germes des fonctions s'annulant en  $p$  par  $\mathfrak{m}_p \leq \mathcal{C}_p^\infty(M)$  et l'idéal jacobien<sup>1</sup> de  $f$  en  $p$  par  $J_f$ . On définit la codimension de  $p$  par :

$$\nu(p) = \begin{cases} \dim_{\mathbb{R}}(\mathfrak{m}_p/J_f) & \text{si } p \text{ est isolé} \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On définit la codimension de  $\alpha$  par :

$$\begin{aligned} \nu : \mathcal{Z} &\longrightarrow \bar{\mathbb{N}} \\ \alpha &\longmapsto \sum_{p \in Z(\alpha)} \nu(p) \end{aligned}$$

Clairement, les zéros de Morse, naissance/élimination et queue d'aronde d'une 1-forme fermée  $\alpha$  contribuent respectivement avec 0, 1 et 2 dans le décompte de la codimension de  $\alpha$ . Les pré-images des  $k \in \bar{\mathbb{N}}$  par la codimension fournissent la partition  $(\mathcal{Z}_k)_{k \in \bar{\mathbb{N}}}$  de l'ensemble des 1-formes fermées. On dit qu'une 1-forme  $\alpha$  est

1. *de Morse* si elle est dans

$$\mathcal{Z}_0 = \{\alpha \in \mathcal{Z} \mid p \text{ est de Morse pour tout } p \in Z(\alpha)\}$$

2. *de naissance/élimination* si elle est dans

$$\mathcal{Z}_1 = \left\{ \alpha \in \mathcal{Z} \mid \begin{array}{l} \text{il existe un unique } p \in Z(\alpha) \text{ non-Morse} \\ \text{et de plus } p \text{ est de naissance/élimination} \end{array} \right\}$$

3. *de codimension 2* si elle est dans  $\mathcal{Z}_2$ . Si de plus,  $\alpha$  n'a qu'un seul zéro non-Morse, on dit qu'elle est *de queue d'aronde*.
4. *de petite codimension* si elle est dans

$$\mathcal{Z}_{\leq 2} := \mathcal{Z}_0 \cup \mathcal{Z}_1 \cup \mathcal{Z}_2$$

5. *de grande codimension* si elle est dans  $\mathcal{Z}_R := \mathcal{Z} \setminus (\mathcal{Z})_{\leq 2}$

On remarque que l'ensemble des zéros  $Z(\alpha)$  d'une forme de petite codimension est isolé dans  $M$ .

## 2.1.2 Pseudo-gradients

Dans le but de fabriquer un objet algébrique – le complexe de Morse-Novikov – associé à  $\alpha$  une 1-forme fermée de Morse on introduit la classe de champs de vecteurs comme ci-dessous, appelés parfois  $\alpha$ -gradients (cf. [Pa1, Def. 2.25]) :

---

1.  $J_f$  est engendré par les dérivés partielles premières de  $f$  en  $p$ .

**Définition 2.1.3** (Champs de vecteurs pseudo-gradients pour  $\alpha$ ). Soit  $\alpha \in \Omega^u(M)$ . Prenons un champ de vecteurs  $\xi \in \Gamma(TM)$  et appelons  $\phi := \alpha(\xi)$  la fonction

$$\begin{aligned} \phi : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto \alpha_p(\xi_p) \end{aligned}$$

On dit que  $\xi$  est un pseudo-gradient pour  $\alpha$  quand :

1.  $\phi < 0$  en dehors de  $Z(\alpha)$
2. Si  $\alpha$  est de Morse, on demande aussi que tout  $p \in Z(\alpha)$  soit un maximum local (et global) non-dégénéré de  $\phi$ .

L'ensemble de champs de vecteurs qui sont pseudo-gradients pour la forme  $\alpha$  sera noté par  $\mathcal{G}(\alpha)$  ; plus généralement, on dira qu'un  $\xi$  champ de vecteurs sur  $M$  est pseudo-gradient s'il existe une 1-forme  $\alpha$  dans la classe  $u$  telle que  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$ .

L'ensemble de pseudo-gradients est noté par  $\mathcal{G}$ .

Ces espaces de champs de vecteurs héritent tous de la topologie  $\mathcal{C}^\infty$  en tant que sous-espaces de l'espace de sections  $\Gamma(TM)$ .

Du fait que les  $p \in Z(\alpha)$  sont des maximums, on a que  $d\phi_p = 0$  et la forme bilinéaire  $\text{Hess}_p \phi : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  est bien définie. La deuxième condition de 2.1.3 s'exprime de façon équivalente, en demandant que la forme quadratique associée à  $\text{Hess}_p \phi$  soit définie négative :

**Définition 2.1.4.** Soient  $\alpha \in \Omega^u(M)$  de Morse et  $\xi$  un champ de vecteurs de  $M$ . On dit que  $\xi$  est pseudo-gradient pour  $\alpha$  s'il vérifie la condition 1 de 2.1.3 et la condition suivante, qui équivaut à la condition 2 dans 2.1.3) :

$$2'. \text{ Hess}_p \phi < 0 \text{ en tout } p \in Z(\alpha)$$

Un pseudo-gradient  $\xi \in \mathcal{G}$  peut être pseudo-gradient pour des formes différentes. On trouve un bon exemple de ce fait dans le lemme de descente 2.2.34 où un certain  $\xi \in \mathcal{G}$  est adapté à une famille à un paramètre de 1-formes. Ces champs bénéficient de bonnes propriétés comme la suivante :

**Lemme 2.1.5.** Soit  $\alpha$  une 1-forme fermée de Morse et soit  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$ . On a  $\xi_p = 0$  pour tout  $p$  zéro de  $\alpha$ . Ainsi  $Z(\alpha) = Z(\xi)$ .

*Démonstration.* Ceci est un fait connu ; on reproduit la démonstration en suivant par exemple le [Pa1, Lemme 2.2] :

Comme  $p \in Z(\alpha)$  est de Morse. On prend une carte  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+1}$  adaptée à  $f$  (cf. dans 2.1.1). On a alors que

$$\forall x = (x_-, x_+) \in \mathbb{R}^{n+1}, \alpha(\varphi^{-1}(x)) = -2x_- dx_- + 2x_+ dx_+$$

Appelons  $X := \varphi_*(\xi) \in \Gamma(TV)$  et posons  $X(0) = (a_-, a_+)$ , le but est de montrer que  $X(0) = 0$ . Par hypothèse  $\alpha(\xi)$  est négative. En coordonnées ceci s'exprime en disant que la fonction  $(\varphi^{-1})^*(\varphi_*(\xi))$  est négative :

$$\alpha(\varphi^{-1}(x))(X(x)) < 0, \forall x \in V \setminus \{0\}$$



Voyons  $a_- = 0$  : Pour les vecteurs  $(x_-, 0)$ ,  $X$  s'écrit

$$\begin{aligned} X(x_-, 0) &= (a_- + X_-^{lin}(x_-) + \dots, a_+ + X_+^{lin}(x_-) + \dots) = \\ &= (a_- + \mathbf{O}_1(x_-), a_+ + \mathbf{O}_2(x_-)) \end{aligned}$$

Ainsi on a que pour tout  $x_- \in \mathbb{R}^i \setminus \{0\}$  :

$$0 > \alpha(\varphi^{-1}(x, 0))(X(x_-, 0)) = -2\langle x_-, a_- + \mathbf{O}_1(x_-) \rangle \Rightarrow \langle x_-, a_- + \mathbf{O}_1(x_-) \rangle > 0$$

Si  $a_- \neq 0$ , on prend  $x = ta_-$  ; on obtient  $t(\|a_-\|^2 + \langle a_-, \mathbf{O}_1(ta_-) \rangle)$ , mais par Cauchy-Schwarz on a que

$$|\langle a_-, \mathbf{O}_1(ta_-) \rangle| \leq \|a_-\| \cdot \|\mathbf{O}_1(ta_-)\| \leq K_1 |t| \|a_-\|^2$$

où  $K_1 \in \mathbb{R}^+$  est la constante du « grand O »  $\mathbf{O}_1$ . Supposons  $K_1 \neq 0$ , on prend  $t_1 < 0$  tel que  $|t_1| < \frac{1}{K_1}$  (si  $K_1 = 0$  il suffit de prendre  $x = -a_-$  pour obtenir la contradiction) et le produit scalaire et plus petit en norme que  $\|a_-\|^2$  et ainsi :

$$t_1(\|a_-\|^2 + \langle a_-, \mathbf{O}_1(t_1 a_-) \rangle) < 0$$

d'où la contradiction.

On en déduit également que  $a_+ = 0$ . □

Voyons une façon équivalente d'énoncer la deuxième condition d'être pseudo-gradient pour une  $\alpha$  de Morse.

Comme un pseudo-gradient  $\xi$  pour  $\alpha$  s'annule en tout zéro  $p$  de  $\alpha$ , on sait que la partie linéaire est invariant par changement de cartes. On a ainsi défini une application linéaire de  $\xi$  en  $p$  que l'on appelle *le linéarisé de  $\xi$  en  $p$*  et que l'on note par  $\xi_p^{\text{lin}} \in \text{End}(T_p M)$ .

Du fait que  $\alpha$  est localement exacte, une primitive  $f|_U$  de  $\alpha$  autour de  $p$  un zéro de  $\alpha$ , vérifie  $df_p = 0$ . Comme on a déjà remarqué, on a son hessien  $\text{Hess}_p f \in \text{Hom}(T_p M \otimes T_p M, \mathbb{R})$  et la forme quadratique associée que l'on note de la même façon. La fonction  $\xi_p^{\text{lin}} \cdot \text{Hess}_p f$  est ainsi à nouveau une forme quadratique sur  $T_p M$  du fait que

$$\left( x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (x_k x_l) = x_j (\delta_{ik} x_l + \delta_{il} x_k)$$

**Lemme 2.1.6.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

2'.  $\text{Hess}_p \phi < 0$ ,  $\forall p \in Z(\alpha)$ , où  $\phi = \alpha(\xi)$ .

2''. La forme quadratique  $\xi_p^{\text{lin}} \cdot \text{Hess}_p f$  est définie négative.

2'''. Pour tout  $v \in T_p M$  non-nul on a que  $\text{Hess}_p f(v, \xi_p^{\text{lin}}(v)) < 0$

*Démonstration.* Soit  $\varphi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+1}$  une carte autour de  $p$ . Notons

$$\begin{cases} \Phi := \phi \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R} \\ F := f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{R} \\ X : V \rightarrow TV \quad \text{tel que} \quad T\varphi \circ \xi = X \circ \varphi \end{cases}$$

Si  $G : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application différentiable d'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ , on pose  $G^{(s)} := d^s G \in \Gamma_V \left( \text{Hom}(\otimes^s \mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^m) \right)$ . Finalement, appelons  $B : T^*\mathbb{R}^{n+1} \times T\mathbb{R}^{n+1}$  l'application bilinéaire canonique. Du fait que  $\Phi$  factorise :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R} \\ & \searrow (F', X) & \nearrow B \\ & T^*\mathbb{R}^{n+1} \times T\mathbb{R}^{n+1} & \end{array}$$

En dérivant on trouve, si  $x \in V, h \in T_x V \simeq \mathbb{R}^{n+1}$  :

$$\begin{aligned} \Phi'_x(h) &= d\Phi_x(h) = dB_{(F'_x, X_x)}(F''_x(h), X'_x(h)) = B(F'_x, X'_x(h)) + B(F''_x(h), X_x) \\ &= F'_x(X'_x(h)) + F''_x(h, X_x) \end{aligned}$$

En dérivant une deuxième fois on obtient :

$$\Phi''_x(h, k) = d(d\Phi_x(h))(k) = F''_x(X'_x(h), k) + F'_x(X''_x(h, k)) + F'''_x(h, X_x, k) + F''_x(h, X'_x(k))$$

ainsi, en  $x = p$ , tenant compte du fait  $F'_p = 0$  et  $X_p = 0$  :

$$\Phi''_p(h, k) = F''_p(X'_p(h), k) + F''_p(h, X'_p(k))$$

et la forme quadratique de  $\mathcal{Q}'$  vérifie :

$$\text{Hess}_p \phi(v, v) = \Phi''_p(T\varphi(v), T\varphi(v)) = 2F''_p(X'_p(T\varphi(v)), T\varphi(v)) = 2 \text{Hess}_p f(\xi_p^{\text{lin}}(v), v)$$

d'où l'équivalence avec  $\mathcal{Q}'''$ .

Abrégeons par  $Q := F''_p$  et  $L := X'_p$  les matrices en coordonnées respectives de la forme quadratique  $\text{Hess}_p f$  et l'endomorphisme  $\xi_p^{\text{lin}}$  de  $T_p M$  ; on pose  $w = T\varphi(v)$  et on dérive la première par rapport au deuxième :

$$\begin{aligned} \xi_p^{\text{lin}} \cdot \text{Hess}_p f(v) &= L \cdot \langle w, Qw \rangle = \langle Lw, Qw \rangle + \langle w, Q(Lw) \rangle = 2\langle w, Q(Lw) \rangle = \\ &= 2Q(w, Lw) = 2 \text{Hess}_p f(v, \xi_p^{\text{lin}}(v)) \end{aligned}$$

On a utilisé que  $Q = Q^\top$ . On a ainsi l'équivalence entre  $\mathcal{Q}''$  et  $\mathcal{Q}'''$ .

□

Deux concepts incontournables qui apparaissent quand on étudie la dynamique engendrée par un champ de vecteurs sont ceux des ensembles stables et instables d'un zéro du champ.

**Définition 2.1.7.** Soit  $\xi$  un champ de vecteurs de  $M$ , et  $p$  tel que  $\xi_p = 0$ . Considérons  $(\xi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  le flot associé à  $\xi$ .

La variété stable associée à  $p$  est

$$W^s(p; \xi) := \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \xi^t(x) = p \right\}$$

De façon similaire, la variété instable associée à  $p$  est

$$W^u(p; \xi) := \left\{ x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \xi^t(x) = p \right\}$$

On utilise le terme variété invariante pour faire allusion à une de ces deux variétés.

**Définition 2.1.8.** On dit qu'un endomorphisme  $L \in \text{End}(E)$  d'un espace vectoriel est élémentaire s'il n'a pas de valeur propre à partie réelle nulle.

Si  $\text{Spec}^\pm(E) = \{\lambda \in \text{Spec}(E) \mid \Re(\lambda) \gtrless 0\}$ , on rappelle que  $E$  scinde comme  $E^- \oplus E^+$  où

$$\begin{cases} E^- = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}^-(E)} E(\lambda) \\ E^+ = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}^+(E)} E(\lambda) \end{cases}$$

On définit l'indice d'un endomorphisme  $L$  élémentaire par

$$\text{ind}(L) := \dim(E^+)$$

Ainsi, un champ de vecteurs  $\xi$  est dit hyperbolique si pour tout zéro  $p \in Z(\xi)$ , le linéarisé  $\xi_p^{\text{lin}}$  est un endomorphisme élémentaire de  $T_p M$ .

Dans cette étude, on a besoin d'un type de champs plus général que les champs hyperboliques :

**Définition 2.1.9.** Soit  $\xi \in \Gamma(TM)$  un champ de vecteurs. On dit que  $\xi$  est presque-hyperbolique si pour tout  $p \in Z(\xi)$ , il existe un ouvert  $U$  de  $M$  tel que  $Z(\xi) \cap U = \{p\}$  et tel que :

1. les variétés invariantes  $W^{s/u}(p; \xi|_U)$  sont des sous-variétés de  $U$  dont l'intersection est transverse et réduite à  $p$ ,
2. les variétés invariantes  $W^{s/u}(p; \xi|_U)$  sont difféomorphes soit à un espace euclidien  $\mathbb{R}^i$ , soit à un demi-espace euclidien  $\mathbb{H}^j := \mathbb{R}^{j-1} \times [0, +\infty)$ , où  $0 \leq i \leq n+1$  et  $1 \leq j \leq n+1$ .

On appellera ces variétés les variétés stable/instable locales du zéro  $p$  en les notant par  $W_{\text{loc}}^{s/u}(p) := W^{s/u}(p; \xi|_U)$ .

Le théorème classique et important sur les champs hyperboliques ci-dessous, que l'on peut trouver dans [AR, Th. 27.1], justifie en particulier que tout champ hyperbolique est presque-hyperbolique :

**Théorème 2.1.10.** Si  $\xi \in \Gamma(TM)$  et  $p$  est un zéro élémentaire de  $\xi$ , il existe un ouvert  $U$  de  $p$  tel que

1.  $W^s(p; \xi|_U)$  et  $W^u(p; \xi|_U)$  sont des sous-variétés de  $U$  dont l'intersection est réduite à  $p$ .
2.  $T_p W^s(p; \xi|_U) = T_p M^-$  et  $T_p W^u(p; \xi|_U) = T_p M^+$

□

**Définition 2.1.11.** *Au vu de la définition 2.1.8 et du théorème 2.1.10, si  $p$  est un zéro d'un champ de vecteurs hyperbolique  $\xi$ , on définit l'indice de  $p$  par :*

$$\text{ind}(p) := \text{ind}(\xi_p^{\text{lin}}) = \dim(T_p M^+)$$

On a la propriété fondamentale suivante :

**Lemme 2.1.12.** *Si  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  avec  $\alpha$  de Morse, le champ  $\xi$  est hyperbolique.*

*Démonstration.* Soit  $p \in Z(\xi)$  ; forcément  $p$  est aussi zéro de  $\alpha$  du fait que  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$ . Considérons  $\xi_p^{\text{lin}}$  comme  $L \in \text{End}(\mathbb{R}^{n+1})$  via des coordonnées. Appelons  $\mathbb{L}$  son complexifié ( $\mathbb{L} \in \text{End}(\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{n+1} \oplus i\mathbb{R}^{n+1})$ ). Supposons par l'absurde que  $\mathbb{L}$  a une valeur propre  $\mu \in \text{Spec}(\mathbb{L}) \cap i\mathbb{R}$ . Posons  $\mu = i\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et prenons  $v \in \mathbb{C}^{n+1}$  vecteur propre non-nul pour  $i\lambda$ . Les vecteurs  $v_1 := v + \bar{v}$  et  $v_2 := i(v - \bar{v})$  sont dans  $\mathbb{R}^{n+1} \oplus 0$  et ainsi

$$\begin{cases} L(v_1) = \mathbb{L}(v + \bar{v}) = i\lambda(v - \bar{v}) = \lambda v_2 \\ L(v_2) = i\mathbb{L}(v - \bar{v}) = i(i\lambda)(v + \bar{v}) = -\lambda v_1 \end{cases}$$

Comme  $\xi$  est pseudo-gradient pour  $\alpha$ , le lemme 2.1.6 nous dit :

$$Q(v, Lv) < 0, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

Ainsi, si on suppose  $v_1$  et  $v_2$  non-nuls on obtient

$$0 > Q(v_1, Lv_1) = Q(v_1, \lambda v_2) = Q(\lambda v_1, v_2) = -Q(L(v_2), v_2) > 0$$

ce qui nous dit que  $v_1 = 0 = v_2$  et donc  $v$  est nul aussi. On tombe dans une contradiction pour avoir supposé que  $L$  avait une valeur propre à partie réelle nulle. □

Et une dernière propriété :

**Lemme 2.1.13.** *Soit  $\alpha$  de Morse et  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$ . Prenons  $p \in Z(\alpha)$ .*

*L'espace tangent à la variété stable/instable locale de  $p$  n'intersecte le cône  $C = \text{Hess}_p f^{-1}(\{0\})$  de  $T_p M$  qu'en 0.*

*Démonstration.* Faisons-le pour  $T_p W^s(p; \xi|_U) = T_p M^-$ . Supposons le contraire et prenons un  $0 \neq v \in T_p M^- \cap C$ . On sait alors qu'il existe un  $\lambda \in \text{Spec}^-(\xi_p^{\text{lin}})$  tel que  $\mathbb{L}(v) = \lambda v$ , ou  $\mathbb{L}$  est le complexifié de  $\xi_p^{\text{lin}}$ . Comme  $v \in C$  on a que  $0 = \text{Hess}_p f(v, v) = \text{Hess}_p f(v, v - \xi_p^{\text{lin}}(v)) + \text{Hess}_p f(v, \xi_p^{\text{lin}}(v))$ .

Comme  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  on obtient en complexifiant

$$\begin{aligned} 0 &< -\text{Hess}_p f(v, \xi_p^{\text{lin}}(v)) = \text{Hess}_p f(v, v - \xi_p^{\text{lin}}(v)) = \text{Hess}_p f(v, v - \mathbb{L}(v)) = \\ &= (1 - \lambda) \text{Hess}_p f(v, v) = 0 \end{aligned}$$

D'où la contradiction d'avoir supposé l'intersection non-vide. □

**Remarque 2.1.14.** La condition  $\alpha(\xi) < 0$  pour un pseudo-gradient nous dit que les trajectoires du champ décroissent par rapport à n'importe quel choix de primitive locale  $f|_U$  de  $\alpha|_U$ . Nous noterons  $W^{s/u}(p)$  à la place de  $W^{s/u}(p; \xi)$  quand le champ de vecteurs est clair du contexte ou quand il n'est pas important.

On remarque que si  $\xi$  est *presque-hyperbolique*, les variétés invariantes  $W^{s/u}(p)$  sont difféomorphes soit à un espace euclidien  $\mathbb{R}^i$  soit à un demi-espace euclidien  $\mathbb{H}^j$  comme dans 2.1.9. Les inclusions de ces variétés  $W^{s/u}(p) \hookrightarrow M$  ne sont en général que des *immersions injectives*.

### 2.1.3 Longueur d'une orbite et variétés invariantes tronquées à la longueur $L$

Il est difficile de garder un contrôle sur les variétés invariantes globales quand on s'intéresse à des familles lisses à  $k$  paramètres, même pour  $k = 0, 1$ . Nous sommes amenés à faire une étude qui garde la compréhension sur le comportement de ces variétés « à la longueur  $L$  », terminologie que nous préciserons :

**Définition 2.1.15.** Soit  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$ . Une trajectoire de  $\xi$  est une courbe  $\gamma : I \rightarrow M$ , solution du problème  $\dot{\gamma} = \xi \circ \gamma$ . On appelle orbite le sous-ensemble  $\ell$  de  $M$  image d'une trajectoire maximale.

**Définition 2.1.16.** Soit  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  et  $\gamma : I \rightarrow M$  une trajectoire de  $\xi$ . On définit la  $\alpha$ -longueur de  $\gamma$  par

$$L(\gamma) := - \int_I \gamma^* \alpha = - \int_\gamma \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Une conséquence directe de la première condition pour que  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  est que  $L(\gamma) > 0$  si  $\gamma$  n'est pas constamment un zéro de  $\alpha$ , puisque loin des zéros de  $\alpha$  on a

$$L(\gamma) = - \int_I \gamma^* \alpha = - \int_I \alpha_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt = - \int_I \alpha(\xi)(\gamma(t)) dt > 0$$

Du fait que l'orbite  $\gamma$  est orientée, la deuxième intégrale de la définition est bien définie. Dans la suite on ne parlera que de la *longueur* d'une trajectoire de  $\xi$  au lieu de  $\alpha$ -longueur s'il n'y a pas d'ambiguïté.

On donne du sens à l'expression « à la longueur  $L$  » maintenant :

**Définition 2.1.17.** Soient  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  et  $p \in Z(\alpha)$ . Pour  $x \in W^s(p)$  et  $y \in W^u(p)$  on définit :

$$\begin{aligned} \gamma^x : [0, +\infty) \rightarrow M \text{ la trajectoire de } \xi \text{ telle que } & \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma^x(t) = p \\ \gamma^x(0) = x \end{cases} \\ \gamma_y : (-\infty, 0] \rightarrow M \text{ la trajectoire de } \xi \text{ telle que } & \begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_y(t) = p \\ \gamma_y(0) = y \end{cases} \end{aligned}$$

Soit  $L > 0$ . On définit la variété stable ou instable de  $p$  tronquée à la longueur  $L$  respectivement par :

$$\begin{aligned} W_L^s(p) &= \{x \in W^s(p) \mid L(\gamma^x) \leq L\} \\ W_L^u(p) &= \{y \in W^u(p) \mid L(\gamma_y) \leq L\} \end{aligned}$$

Étant donné deux zéros  $p$  et  $q$ , on s'intéresse aux trajectoires du champ  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  qui « partent » de  $p$  et « finissent » en  $q$ .

**Définition 2.1.18** (Liaisons). *Soit  $x \in W^u(p) \cap W^s(q)$  et soit*

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M \text{ une trajectoire non-triviale de } \xi \text{ telle que } \begin{cases} \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = p \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = q \\ x \in \gamma(\mathbb{R}) \end{cases}$$

*L'orbite  $\ell = \gamma(\mathbb{R})$  d'une telle trajectoire sera appelée liaison de  $p$  à  $q$ . On note l'espace de liaisons de  $p$  à  $q$  par  $\mathcal{L}(p, q)$ . On définit la longueur d'une liaison  $\ell$  comme la longueur d'une des trajectoires la paramétrant comme ci-dessus.*

Il est clair que l'intersection des variétés invariantes est réunion d'orbites :

$$W^u(p) \cap W^s(q) = \bigcup_{\ell \in \mathcal{L}(p, q)} \ell$$

De même, on peut ne considérer que les liaisons de longueur inférieure à  $L$ , pour un certain  $L > 0$  :

$$\mathcal{L}_L(p, q) := \{\ell \in \mathcal{L}(p, q) \mid L(\ell) \leq L\}$$

ou celles d'une certaine longueur :

$$\mathcal{L}_{=L}(p, q) := \{\ell \in \mathcal{L}(p, q) \mid L(\ell) = L\}$$

On dit que la liaison  $\ell$  est concernée avec  $p \in Z(\alpha)$  s'il existe un  $r \in Z(\alpha)$  tel que  $\ell \in \mathcal{L}(p, r)$  ou bien  $\ell \in \mathcal{L}(r, p)$ .

On introduit maintenant une condition sur  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  pour que la paire  $(\alpha, \xi)$  définisse un complexe de chaînes dont on parlera dans la section 2.1.4 quand  $\alpha$  est de Morse.

**Définition 2.1.19.** *Soit  $\xi \in \mathcal{G}$ . On dit que  $\xi$  est Morse-Smale si*

$$W^u(p) \pitchfork W^s(q), \quad \forall p, q \in Z(\xi)$$

*On note cet ensemble de champs de vecteurs par  $\mathcal{G}^0$ .*

Le résultat suivant est classique et découle du théorème de Kupka-Smale :

**Théorème 2.1.20.** *Soit  $\alpha$  est de Morse. La propriété d'être Morse-Smale pour un pseudo-gradient  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  est générique, ce qui veut dire que l'ensemble  $\mathcal{G}^0(\alpha)$  de pseudo-gradients Morse-Smale pour  $\alpha$  est résiduel dans  $\mathcal{G}(\alpha)$  avec la topologie  $\mathcal{C}^\infty$ .*

*Démonstration.* Consulter la preuve en [Pa1, Ch.4 Th.2.5 et aussi Th.2.13 et Cor.2.15 si on fixe les cartes adaptées].  $\square$

Les variétés invariantes tronquées et les ensembles des liaisons associés à un couple  $(\alpha, \xi)$  où  $\alpha$  est de Morse et  $\xi$  est Morse-Smale permettent de définir la différentielle de Morse-Novikov qui apparaît dans la section 2.1.4. On renvoie vers [Lat, Ch.2] où les ensembles des liaisons et des multi-liaisons sont étudiés minutieusement.

### 2.1.4 Enroulement et complexe de Morse-Novikov

Nous sommes presque en position de définir le complexe de Morse-Novikov  $C_*(\alpha, \xi)$  associé à un couple  $(\alpha, \xi)$  où  $\xi \in \mathcal{G}^0(\alpha)$  avec  $\alpha$  Morse. On avance qu'il s'agira d'un complexe de chaînes de  $\Lambda_{-u}$ -modules libres basés. Pour ce faire on a besoin des objets suivants, tous en relation avec  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  le revêtement universel de  $M$ , où l'on prend  $\widetilde{M}$  avec la  $\mathcal{C}^\infty$ -structure naturelle pour que  $\pi$  soit un difféomorphisme local :

1. une primitive  $h : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme exacte  $\pi^*\alpha$ . On appelle primitive de  $\alpha$  une telle  $h$  dans la suite,
2. le champ de vecteurs  $\widetilde{\xi}$ , relevé de  $\xi$ , qui vérifie

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \xrightarrow{\widetilde{\xi}} & T\widetilde{M} \\ \pi \downarrow & & \downarrow T\pi \\ M & \xrightarrow{\xi} & TM \end{array}$$

3. un choix de relevés de  $Z(\alpha)$  – donc de points critiques de  $h$  – de même cardinal que  $Z(\alpha)$  et que l'on note par  $B(\alpha)$ . En général, on suivra la convention de noter par  $P$  le relevé choisi de  $p \in Z(\alpha)$ .

Le champ  $\widetilde{\xi}$  est pseudo-gradient pour  $dh$ . Pour  $P \in B(\alpha)$ , on note  $W^{s/u}(P)$  les variétés invariantes de  $\widetilde{\xi}$  associées à  $P$ . Par construction de  $\widetilde{\xi}$  et les propriétés habituelles du revêtement universel, on a

$$W^{s/u}(gP) = gW^{s/u}(P) \quad \text{et} \quad \pi(gW^{s/u}(P)) = W^{s/u}(p)$$

pour tout  $g \in \pi_1 M$ .

Pour définir le complexe  $C_*(\alpha, \xi)$ , on munit les variétés instables des zéros de  $Z(\alpha)$  d'une orientation ; plus précisément, si  $p \in Z(\alpha)$  est un zéro d'indice  $i$ , on se donne une classe de bases ordonnées  $\text{Or}_p$  de  $T_p W^u(p)$ . Du fait que les variétés invariantes de  $p$  s'intersectent transversalement en  $p$  du fait que  $\xi$  est hyperbolique, la variété stable de  $p$  acquiert une co-orientation. Le revêtement  $\pi$  étant un difféomorphisme local, on peut relever l'orientation  $\text{Or}_p$  de  $T_p W^u(p)$  à des orientations  $\text{Or}_{gP}$  des  $T_{gP} W^u(gP)$  pour tout  $g \in \pi_1 M$ , plus précisément  $\text{Or}_{gP}$  est la classe d'une base ordonnée  $O_{gP} = \{v_1, \dots, v_i\}$  de  $T_{gP} W^u(gP)$  telle que  $[\{T_{gP}\pi(v_1), \dots, T_{gP}\pi(v_i)\}] = \text{Or}_p$ . De même, les variétés stables  $W^s(gP)$  gagnent une co-orientation. Ce faisant, on a une orientation induite par  $\text{Or}_p$  en tout point d'une variété instable  $W^u(p)$ , car elle est difféomorphe à un espace euclidien.

On observe que  $\text{Crit}(h)$  est la réunion de  $\pi_1 M$ -orbites de  $B(\alpha)$ . On considère  $L(\alpha)$  le  $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par l'ensemble des points critique munis d'une classe d'orientation :

$$L(\alpha) := \mathbb{Z}\langle (P, \text{Or}_P) \rangle_{P \in \text{Crit}(h)}$$

Ainsi défini,  $L(\alpha)$  est naturellement un  $\mathbb{Z}[\pi_1 M]$ -module à gauche avec l'action  $ng \cdot (P, \text{Or}_P) := n(gP, \text{Or}_{gP})$ . On peut voir  $B(\alpha)$  comme une  $\mathbb{Z}[\pi_1 M]$ -base de  $L(\alpha)$  via l'identification  $B(\alpha) \simeq$

$\{(P, \text{Or}_P) \mid P \in B(\alpha)\}$ , autrement dit :

$$L(\alpha) = \mathbb{Z}[\pi_1 M] \cdot B(\alpha)$$

Avec les notations du chapitre 1 on a :

**Définition 2.1.21.** *Le module de Morse-Novikov de  $\alpha$  est*

$$C_*(\alpha) := \Lambda_{-u} \otimes_{\Lambda} L_*(\alpha)$$

*Il s'agit d'un  $\Lambda_{-u}$ -module libre basé sur  $B_*(\alpha)$ , gradué par l'indice des points critiques.*

Nous voulons maintenant définir une différentielle  $C_*(\alpha) \rightarrow C_{*-1}(\alpha)$ . Elle va dépendre du champ et on la note par  $\partial^\xi$ . Pour qu'elle soit définie, on doit demander au champ  $\xi$  d'être Morse-Smale : elle va « compter » les liaisons entre deux points  $p, q$  de  $Z(\alpha)$  d'indices consécutifs. Pour ce faire, on va associer un élément  $g_\ell$  de  $\pi_1 M$  à chaque  $\ell \in \mathcal{L}(p, q)$ , ainsi qu'un signe, que nous appelons respectivement *l'enroulement* et le signe de la liaison ; ils ne sont définis qu'après avoir choisi  $B(\alpha)$  et avoir orienté les variétés instables des  $p \in Z(\alpha)$ .

**Définition 2.1.22.** *Soit  $\ell \in \mathcal{L}(p, q)$ . Soient  $P, Q$  des relevés de  $p, q$ . La liaison relevée  $\tilde{\ell}$  de  $\ell$  est l'image de  $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}$ , l'unique relèvement d'une paramétrisation  $\gamma$  de  $\ell$  qui part de  $P$ . L'arrivée de  $\tilde{\ell}$  est un point dans la fibre  $\pi^{-1}(q)$  et est représentée ainsi par un unique  $g_\ell Q$ . L'application suivante :*

$$\begin{array}{ccc} e : \mathcal{L}(p, q) & \longrightarrow & \pi_1 M \\ \ell & \longmapsto & g_\ell \end{array}$$

*est appelée enroulement. Nous définissons le  $u$ -enroulement de la liaison  $\ell$  par la valeur numérique  $u(g_\ell)$ .*

Et maintenant le signe :

**Définition 2.1.23.** *Soit  $(\alpha, \xi)$  un couple où  $\alpha$  est de Morse et  $\xi$  Morse-Smale pour  $\alpha$ . Considérons  $p, q \in Z(\alpha)$  d'indices respectifs  $i+1, i$  et  $\ell \in \mathcal{L}(p, q)$  une liaison de  $p$  à  $q$ . Prenons un point  $x \in \ell$ .*

*D'un côté,  $\nu_x(W^s(q); M)$  est orienté par l'orientation induite par  $\text{Or}_q$  ; d'un autre côté on suit la convention d'orienter  $\nu_x(\ell; W^u(p))$  par la classe d'une base  $\{v_2, \dots, v_{i+1}\}$  telle que l'orientation induite par  $\text{Or}_p$  en  $x$  coïncide avec la classe de  $\{\xi(x), v_2, \dots, v_{i+1}\}$ .*

*La transversalité des variétés invariantes nous donne un isomorphisme canonique  $\nu_x(W^s(q); M) \simeq \nu_x(\ell; W^u(p))$  ; on associe ainsi le signe  $+1$  à la liaison si cet isomorphisme préserve les orientations indiquées et le signe  $-1$  dans le cas contraire :*

$$\eta : \mathcal{L}(p, q) \rightarrow \{\pm 1\}$$

Avant de définir la différentielle on introduit la *taille*, un concept qui met en relation les longueurs et  $u$ -enroulements des liaisons.



**Définition 2.1.24.** Soit  $\alpha$  une 1-forme fermée, munie d'une primitive  $h$  et d'un choix de relevés  $B(\alpha)$ . On définit la taille de  $(\alpha, B(\alpha))$  par le maximum des hauteurs relatives des points de  $B(\alpha)$  :

$$T_{B(\alpha)} := \max_{P, Q \in B(\alpha)} h(P) - h(Q) \geq 0$$

**Lemme 2.1.25.** Si  $\ell \in \mathcal{L}(p, q)$ , sa longueur est donnée par la hauteur relative des zéros concernés avec la liaison relevée (voir déf. 2.1.22)

$$L(\ell) = h(P) - h(g_\ell Q) = h(P) - h(Q) - u(g_\ell)$$

*Démonstration.* La longueur de  $\ell$  coïncide avec celle de sa relevée du fait que  $\int_\gamma \alpha = \int_{\tilde{\gamma}} \pi^* \alpha$ , mais dans le revêtement universel on a une primitive globale  $h$  et clairement  $L(\ell) = - (h(g_\ell Q) - h(P))$ .

On choisit un lacet  $\lambda : [0, T] \rightarrow M$  basé en  $q \in M$  tel que  $[\lambda] = g_\ell \in \pi_1(M, q)$ . On appelle  $\tilde{\lambda}$  le seul relèvement tel que  $\tilde{\lambda}(0) = Q$

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{M} \\ & \nearrow \tilde{\lambda} & \downarrow \pi \\ [0, T] & \xrightarrow{\lambda} & M \end{array}$$

autrement dit, on a  $\tilde{\lambda}(T) = g_\ell Q$  et

$$u(g_\ell) = [\alpha]([\lambda]) = \int_\lambda \alpha = \int_{\tilde{\lambda}} \pi^* \alpha = h(g_\ell Q) - h(Q)$$

On remarque que ceci nous donne une partition de l'ensemble des liaisons  $\mathcal{L}(p, q) = \bigcup_{g \in \pi_1 M} \mathcal{L}_g(p, q)$

où les liaisons de

$$\mathcal{L}_g(p, q) = \{\ell \in \mathcal{L}(p, q) \mid e(\ell) = g\} \subseteq \mathcal{L}_{=h(P)-h(Q)-u(g)}(p, q)$$

possèdent toutes le même enroulement,  $u$ -enroulement et longueur.  $\square$

**Remarque 2.1.26.** Une conséquence directe de la positivité de la longueur d'une liaison est que son  $u$ -enroulement est majoré par la taille : soit  $\ell \in \mathcal{L}(p, q)$  ; grâce à la formule du lemme 2.1.25

$$0 \leq L(\ell) = h(P) - h(Q) - u(g_\ell) \text{ et donc } u(g_\ell) \leq h(P) - h(Q) \leq T_{B(\alpha)}$$

Pour définir la différentielle, on nécessite de l'incidence entre deux points :

**Définition 2.1.27.** Soit  $(\alpha, \xi)$  où  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  est Morse-Smale et  $\alpha$  est de Morse. Soient  $p, q \in Z(\alpha)$  d'indices respectifs  $i+1, i$  et soient  $P, Q$  deux relevés respectifs. On définit l'incidence de  $P$  avec  $Q$  par

$$\langle P, Q \rangle^\xi := \sum_{\ell \in \mathcal{L}(p, q)} \eta_\ell g_\ell \in \mathbb{Z}[[\pi_1 M]],$$

où les enroulements (déf. 2.1.22) sont calculés à partir des relevés  $P, Q$ .

**Proposition 2.1.28.** *Avec les notations de la définition 2.1.27 on a*

$$\langle P, Q \rangle^\xi \in \Lambda_{-u}$$

*Démonstration.* Notons  $\lambda_{PQ} := \langle P, Q \rangle^\xi$ . On veut montrer que, pour tout  $C \in \mathbb{R}$  l'ensemble  $\text{supp}(\lambda_{PQ}) \cap (\pi_1 M)^{\geq C}$  est fini. Grâce à la remarque 2.1.26 on a

$$\lambda_{PQ} \in (\nu \leq T)$$

Autrement dit  $\text{supp}(\lambda_{PQ}) \subseteq (\pi_1 M)^{\leq T}$  et il suffit de considérer des  $C \leq T$  et de montrer que  $\text{supp}(\lambda_{PQ}) \cap (\pi_1 M)^{\geq C}$  est fini. On ne considère que les liaisons  $\ell$  dont l'enroulement (avec les relevés  $P, Q$ ) vérifie  $u(g_\ell) \geq C$ . La longueur d'une telle liaison est majorée par  $T - C$  du fait que

$$L(\ell) = h(P) - h(Q) - u(g_\ell) \leq T - C$$

Ainsi, on est conduit à montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de liaisons dans  $\mathcal{L}_{T-C}(p, q)$ . Mais pour des zéros d'indice consécutifs et  $\xi$  Morse-Smale, on a que  $\mathcal{L}_H(p, q) = \overline{\mathcal{L}}_H(p, q)$  pour tout  $H$  positif. L'étude de [Lat, Prop. 2.8, 2.9] permet de conclure : l'espace de liaisons  $\mathcal{L}_H(p, q)$  est une variété compacte de dimension zéro.  $\square$

**Lemme 2.1.29.** *L'incidence  $\langle \cdot, \cdot \rangle : L_{*+1}(\alpha) \times L_*(\alpha) \rightarrow \Lambda_{-u}$  associée à un  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  Morse-Smale vérifie :*

1.  $\langle gP, Q \rangle = g\langle P, Q \rangle, \quad \forall g \in \pi_1 M,$
2.  $\langle P, gQ \rangle = \langle P, Q \rangle g^{-1}, \quad \forall g \in \pi_1 M$
3.  $\langle -P, Q \rangle = \langle P, -Q \rangle = -\langle P, Q \rangle.$

*Démonstration.* Les propriétés découlent directement des définitions de l'enroulement et du signe d'une liaison.  $\square$

Et enfin la différentielle :

**Définition 2.1.30.** *Soit  $\alpha$  de Morse munie de relevés  $B(\alpha)$  de  $Z(\alpha)$ , et  $\xi \in \mathcal{G}^0(\alpha)$  Morse-Smale pour  $\alpha$  ; on a une application  $\Lambda_{-u}$ -linéaire  $\partial_{*+1}^\xi : C_{*+1}(\alpha) \rightarrow C_*(\alpha)$  définie sur les éléments de  $B(\alpha)$  par*

$$\begin{aligned} \partial_{*+1}^\xi : C_{*+1}(\alpha) &\longrightarrow C_*(\alpha) \\ P &\longmapsto \sum_{Q \in B_*(\alpha)} \langle P, Q \rangle^\xi Q \end{aligned}$$

*On a ainsi la matrice d'incidence associée à  $\partial_{*+1}^\xi$  dans les bases  $B(\alpha)$ , notée par  $A_{*+1}$  dont le terme à la place<sup>2</sup>  $ij$  est  $\langle P^i, Q^j \rangle^\xi$  :*

$$A_{*+1} := (\langle P^i, Q^j \rangle^\xi)_{\substack{P^i \in B_{*+1}(\alpha) \\ Q^j \in B_*(\alpha)}}$$

**Théorème 2.1.31** (Novikov). *L'application  $\partial^\xi$  est bien définie et est une différentielle pour le complexe  $C_*(\alpha)$ .*

Il s'agit d'un théorème connu de Novikov ([No2]). On peut consulter une preuve dans [Lat, 2.15, 2.17].

---

2. Le choix inusuel des matrices opérant à droite sera justifié dans la remarque 2.2.37.

### 2.1.5 Gradients $L$ -transverses

Le type de pseudo-gradients que l'on définit dans 2.1.34 jouera un rôle clé dans notre étude. La définition dépend d'un choix de relevés des zéros du champ.

**Définition 2.1.32.** *On définit l'espace de pseudo-gradients basés comme l'espace de couples  $(\xi, B)$  où  $\xi \in \mathcal{G}$  est un pseudo-gradient et  $B$  est un choix de relevés de  $Z(\xi)$  dans le revêtement universel de  $M$ . On note cet espace par  $G$ . De plus, on peut considérer les sous-espaces de pseudo-gradients basés qui sont Morse-Smale, ou des ceux qui sont adaptés à une 1-forme particulière :*

$$G^0 := \{(\xi, B) \in G \mid \xi \in \mathcal{G}^0\} \quad ; \quad G(\alpha) := \{(\xi, B) \in G \mid \xi \in \mathcal{G}(\alpha)\}$$

**Remarque 2.1.33.** La *topologie locale* de l'espace des pseudo-gradients et de sa version basée et la même : on peut voir  $G$  comme un revêtement ramifié de  $\mathcal{G}$ , dont les fibres sont des produits de copies de  $\pi_1 M$ .

On écrit  $\xi \in G$  pour signifier que  $\xi$  basé par un certain  $B$ . Il est important de réaliser que pour des  $\xi$  pseudo-gradients pour  $\alpha$ , l'inclusion générale  $Z(\xi) \subseteq Z(\alpha)$  donnée par la première condition de  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  nous dit que tout choix de relevés  $B(\alpha)$  de  $\alpha$  détermine un choix de relevés  $B$  des zéros du champ de vecteurs et donc un élément de  $G(\alpha)$ .

**Définition 2.1.34.** *Soit  $(\xi, B) \in G$  et soit  $L \in \mathbb{R}$ . On dit que  $(\xi, B)$  est  $L$ -transverse si*

$$W^u(P) \pitchfork W^s(gQ), \text{ pour tous } P, Q \in B \text{ et } g \in \pi_1 M \text{ tel que } u(g) \geq -L.$$

*On note cet ensemble de pseudo-gradients basés par  $G_L^0$ . Si de plus  $\xi$  est adapté à  $\alpha$ , on dira qu'il est  $L$ -transverse pour  $\alpha$  et on note ces champs par  $G_L^0(\alpha)$ .*

**Remarque 2.1.35.** Notons par  $T := T_B \geq 0$  la taille de  $(\alpha, B)$ , où  $B$  est un choix de relevés des zéros de  $\alpha$ .

Les relevés fixés, la condition d'être  $L$ -transverse pour un champ  $\xi$  si  $L < -T$  est vide : la condition qui porte sur  $g \in \pi_1 M$  nous dit que  $P$  est au dessous de  $gQ$ , et la variété instable de  $P$  ne saurait pas rencontrer la stable de  $gQ$  :

$$h(P) - h(gQ) = h(P) - h(Q) - u(g) \leq T + L < T - T = 0$$

La notion de  $L$ -transverse a ainsi du sens pour  $L \in [-T, +\infty[$  (comparer à la remarque 2.1.26). On pourrait avoir l'impression que cette condition n'est pas assez générale pour qu'elle soit générique : si  $\ker(u)$  est infini,  $P, Q$  sont deux relevés et si  $u(g) \geq -L$ , on trouve a priori une infinité des conditions

$$W^u(P) \pitchfork W^s(kgQ), \quad k \in \ker(u)$$

à vérifier. Mais loin des points critiques de  $h$ , le champ pseudo-gradient  $\tilde{\xi}$  forme un angle non petit avec les niveaux de  $h$  ; il n'y a donc qu'une quantité finie d'intersections du dernier type différentes de l'ensemble vide.

Le lemme suivant montre que la  $L$ -transversalité est en particulier, une propriété dense des pseudo-gradients :

**Lemme 2.1.36.** *Soit  $\alpha$  de Morse munie de relevés  $B$ . La propriété d'un pseudo-gradient  $\xi \in \mathcal{G}(\alpha)$  d'être  $L$ -transverse pour le choix de relevés  $B$ , est générique.*

*Démonstration.* Il suffit de démontrer qu'une propriété générique implique la  $L$ -transversalité. En effet, la clé est de remarquer que même si les variétés invariantes des relevés quelconques de  $Z(\alpha)$  dans le revêtement  $\widetilde{M}$  peuvent être très nombreuses, elles sont  $\pi_1 M$ -invariantes. En particulier leurs intersections sont régies par les intersections des variétés invariantes dans la variété  $M$ .

Or, demander la transversalité des variétés invariantes à une longueur positive  $H$  donnée, c'est-à-dire  $W_H^u(p) \pitchfork W_H^s(q)$ , pour tous les  $p, q \in Z(\alpha)$ , est une propriété générique : par exemple du fait qu'il s'agit d'une condition plus faible que celle d'être Morse-Smale qui demande la transversalité des variétés non-tronquées et qui est générique elle-même (2.1.20). On se contente alors de remarquer que si on demande à  $\xi$  de vérifier la dernière propriété pour un  $H > T_B + L$ , il vérifiera automatiquement la propriété d'être  $L$ -transverse. Ceci découle du fait que si on regarde une liaison  $\tilde{\ell} \in \mathcal{L}(P, gQ)$  dans l'intersection  $W^u(P) \cap W^s(gQ)$ , elle détermine une liaison  $\ell = \pi(\tilde{\ell}) \in \mathcal{L}(p, q)$ , avec la contrainte  $u(g) \geq -L$  et dont la liaison relevé (cf. dans la déf. 2.1.22) est juste  $\tilde{\ell}$ . Sa longueur est donc

$$L(\ell) = h(P) - h(Q) - u(g) \leq T_B + L < H$$

Ceci nous dit que toutes les liaisons à considérer dans la condition de la définition 2.1.34 proviennent de l'intersection transverse  $W_H^u(p) \pitchfork W_H^s(q)$ , ce qui finit la preuve.  $\square$

Les champs  $L$ -transverses présentent l'avantage d'être plus maniables que les champs Morse-Smale. Par contre, ils n'induisent pas une différentielle de façon générale. Ils donnent cependant une notion d'incidence *tronquée*, à valeurs dans l'anneau de groupe. Les variétés invariantes associées à chaque couple de zéros admettent une longueur de troncature où leur intersection est transverse :

**Lemme 2.1.37.** *Soit  $\alpha$  de Morse munie de relevés  $B$  et soit  $\xi$  un pseudo-gradient  $L$ -transverse pour  $\alpha$ . Soient  $p, q \in Z(\alpha)$  et soient  $P, Q \in B$  ses deux relevés. Alors, l'intersection suivante est transverse :*

$$W_H^u(p) \pitchfork W^s(q) \quad \text{pour tout } H \text{ tel que } 0 < H \leq h(P) - h(Q) + L.$$

*De façon équivalente, si cette condition est vérifiée pour tout couple de zéros  $p, q \in Z(\alpha)$ , alors  $\xi$  est  $L$ -transverse.*

*Démonstration.* Il suffit de le montrer pour la valeur maximale  $h(P) - h(Q) + L$ . Si on suppose par l'absurde qu'il existe un  $x$  où l'intersection  $W_{h(P)-h(Q)+L}^u(p) \pitchfork W^s(q)$  n'est pas transverse, ce  $x$  est contenu dans une liaison  $\ell$  allant de  $p$  à  $q$  et d'enroulement  $g$ . Sa liaison relevée  $\tilde{\ell}$  est contenue dans l'intersection  $W^u(P) \cap W^s(gQ)$ , mais cette intersection est transverse du fait que  $u(g) \geq -L$  : on le déduit facilement en appliquant la formule 2.1.25 pour trouver la longueur de  $\ell$  qui est majorée par  $h(P) - h(Q) + L$ . Ceci amène à une contradiction, vu que la transversalité est préservée par la projection  $\pi$  du revêtement, et les points de  $\ell$  doivent être tous résultat d'une intersection transverse de  $W_{h(P)-h(Q)+L}^u(p)$  avec  $W^s(q)$ . La réciproque est évidente.  $\square$

Notamment, pour un champ  $(\xi, B) \in G_L^0$ , si  $p, q$  sont deux zéros d'indice consécutif, l'ensemble de liaisons de  $p$  à  $q$  de longueur plus petite ou égale à  $h(P) - h(Q) + L$  est fini.

**Définition 2.1.38.** Soit  $\alpha$  de Morse munie de relevés  $B$  et soit  $\xi$  un pseudo-gradient  $L$ -transverse pour  $\alpha$ . Soient  $p, q \in Z(\alpha)$  d'indices respectifs  $* + 1, *$  et soient  $P, Q \in B$  les deux relevés respectifs. Notons par  $H := h(P) - h(Q) + L$  la longueur maximale de transversalité (cf. dans 2.1.37).

On définit la  $L$ -incidence de  $P$  avec  $Q$  par

$$\langle P, Q \rangle_L^\xi := \sum_{\ell \in \mathcal{L}_H(p, q)} \eta_\ell g_\ell \in \mathbb{Z}[\pi_1 M]$$

Les matrices de  $L$ -incidence associées au champ  $\xi$ , à coefficients cette fois dans l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}[\pi_1 M]$  ont toujours du sens et on les note par  $(A_*)_L$ . Dans les bases  $B_*$ , le terme à la place  $ij$  de  $(A_*)_L$  est  $\langle P^i, Q^j \rangle_L^\xi$ .

**Remarque 2.1.39.** Soit  $\xi \in \mathcal{G}$  un pseudo-gradient. Si  $\xi \in \mathcal{G}^0$  ( $\xi$  est Morse-Smale), il vérifie clairement la condition pour être  $L$ -transverse, et ceci pour tout  $L \in \mathbb{R}$  et pour tout  $B$  choix de relevés. Ce n'est pas dur de se convaincre du fait que la réciproque est aussi vraie. On peut ainsi confondre les notions de champs pseudo-gradients Morse-Smale et  $\infty$ -transverses; on a les relations suivantes :

$$G^0 = G_\infty^0 \quad \text{et} \quad G_\infty^0 \subseteq G_L^0 \subseteq G_{L'}^0 \quad \text{si} \quad 0 < L' < L$$

En particulier, si  $(\xi, B) \in G^0(\alpha)$  avec  $\alpha$  de Morse, on peut s'intéresser à ses matrices de  $L$ -incidence  $(A_*)_L$  pour n'importe quel  $L \in \mathbb{R}$ . Si  $A_*$  désigne une matrice d'incidence de  $\partial^\xi$ , il est clair que

$$\text{tr}_L(A_*) = (A_*)_L$$

où  $\text{tr}_L : \text{Mat}(\Lambda_{-u}) \rightarrow \text{Mat}(\Lambda)$  est l'application induite sur les matrices par la  $L$ -troncature (voir la définition 1.1.16 et la remarque 1.1.20). Ceci vient du fait que la matrice de  $L$ -incidence ne considère que les liaisons dont l'enroulement  $g$  vérifie  $u(g) \geq -L$ , autrement dit, celles dont l'enroulement satisfait la condition d'appartenance au support d'une troncature à la longueur  $L$ .

Même s'il est très simple, le lemme suivant s'avère éclairant :

**Lemme 2.1.40.** Soit  $L \in ]0, \infty]$  et  $i \in \{0, \dots, n+1\}$ . Soit  $\alpha$  de Morse et  $(\xi, B) \in G_L^0(\alpha)$ . Notons par  $A$  la matrice de  $L$ -incidence du morphisme  $\partial_i^\xi$  associé à la paire  $(\alpha, \xi)$ .

Alors, la positivité de  $A$  est toujours majorée par la taille  $T_B$  :

$$\text{pos}(A) \leq T_B$$

*Démonstration.* Ceci découle du fait que tout élément  $g$  dans le support des coefficients de  $A$  est l'enroulement d'une certaine liaison et la remarque 2.1.26 s'applique :  $u(g) \leq T_B$ . Ainsi la valuation des coefficients de  $A$  est aussi majorée par la taille, ce qui permet de conclure vu la définition 1.1.31 de positivité d'une matrice.

La remarque s'applique bien sûr à n'importe quelle matrice  $B$  dont les termes sont des enroulements associés à une paire  $(\xi, B)$  comme dans l'énoncé, même si  $B$  n'est pas la matrice de  $L$ -incidence.  $\square$

Les champs  $L$ -transverses bénéficient de la propriété importante du lemme suivant. Cependant, nous verrons dans 2.1.42 que ce n'est plus le cas des champs Morse-Smale :

**Lemme 2.1.41.** *Soit  $\alpha$  une 1-forme avec un ensemble de zéros  $Z(\alpha)$  isolé, et soit  $L \in \mathbb{R}$ . L'ensemble de  $G_L^0(\alpha)$  est ouvert dans  $G(\alpha)$ .*

*Démonstration.* Il suffit de le voir pour un choix de relevés  $B$  fixé. Prenons  $\xi$  un pseudo-gradient  $L$ -transverse adapté à  $\alpha$  et soient  $p, q$  deux zéros de  $\alpha$ . Prenons  $x \in W_{h(P)-h(Q)+L;\xi}^u(p) \cap W^s(q; \xi)$ ; la condition  $T_x W_{h(P)-h(Q)+L}^u(p; \xi) + T_x W^s(q; \xi) = T_x M$  est invariante tout le long de l'orbite de  $\xi$  passant par  $x$ , et elle est aussi ouverte en  $\xi$  dans  $G(\alpha)$  : les espaces  $T_y W_{h(P)-h(Q)+L}^u(p; \eta)$  et  $T_y W^s(q; \eta)$  sont toujours supplémentaires si on choisit  $\eta \in G(\alpha)$  suffisamment  $\mathcal{C}^\infty$ -proche de  $\xi$  et  $y$  suffisamment proche de  $x$ . Ainsi, la  $L$ -transversalité s'exprime comme une intersection finie de conditions ouvertes grâce au lemme 2.1.37.  $\square$

**Proposition 2.1.42.** *Soit  $\alpha$  une 1-forme fermée sans centre avec  $Z(\alpha) \neq \emptyset$  et soit  $\xi$  Morse-Smale pour  $\alpha$  ( $\xi \in G^0(\alpha)$ ).*

*Il existe une suite de champs  $(\xi_L)_{L \in \mathbb{N}}$  telle que*

$$\begin{cases} \xi_L \in G_L^0(\alpha) \setminus G^0(\alpha) \\ (\xi_L) \rightarrow \xi \text{ pour la topologie } \mathcal{C}^0 \end{cases}$$

*En particulier,  $G(\alpha) \setminus G^0(\alpha)$  n'est pas fermé dans  $G(\alpha)$ .*

*Démonstration.* Prenons  $B$  un choix de relevés des zéros de  $\alpha$  quelconque. L'idée est d'approcher  $\xi$  par  $\xi_L$ , que nous construisons de suite pour un certain  $L \in \mathbb{N}$ . Le champ  $\xi$  et  $\xi_L$  coïncident dans un petit voisinage compact  $K_L$  des variétés invariantes tronquées  $W_{T_B+L}^{s/u}(p)$ , où  $T_B$  désigne la taille associée aux relevés  $B$ . Comme  $\xi$  est Morse-Smale, le champ vecteurs  $\xi_L$  est  $L$ -transverse en vue du lemme 2.1.37. Prenons une liaison  $\ell \in \mathcal{L}(p, q)$  pour  $\xi$  de  $u$ -enroulement inférieur à  $-L$ , qui provient de l'intersection transverse  $W^u(p) \cap W^s(q)$ . Prenons  $V$  un petit voisinage ouvert de  $\ell$  de sorte que  $V \cap K_L$  soit la réunion de  $B_p, B_q$ , deux petites boules ouvertes contenant  $p, q$  respectivement. On obtient  $\xi_L$  en modifiant  $\xi$  dans  $V \setminus K_L$  de sorte que  $\ell$  soit toujours l'image d'une orbite de  $\xi_L$  mais telle que  $\text{cod}(T_x W^u(p) + T_x W^s(q)) = 1$  pour un certain  $x \in \ell$ , et donc pour tout  $x \in \ell$ . Ceci est possible dès que  $\text{ind}(p) \neq n+1$  et  $\text{ind}(q) \neq 0$ ; il suffit de trouver le chemin de champs de vecteurs  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  associé à une isotopie  $\alpha$ -négative ( $\alpha(\xi_t) < 0$ ) d'une boule  $B_x \subseteq V \setminus K_L$  qui fixe  $x$ , et rend tangentielle à  $W^s(q)$  une sous-variété de dimension suffisamment grande de  $W^u(p)$ . Quitte à modifier l'extrémité  $\xi_1$  dans la boule en multipliant par une fonction cloche, on trouve un  $\xi'_1$  qui coïncide avec  $\xi$  sur  $\partial B_x$  et qui n'est pas Morse-Smale par construction. La suite de compacts  $(K_L)_{L \in \mathbb{N}}$  recouvre  $M$  sauf éventuellement une réunion  $\mathcal{T}$  de tubes de trajectoires de  $\xi$ . Mais,  $\mathcal{T}$  ne contient aucune liaison de  $\xi$  et donc  $\xi_L|_{\mathcal{T}} = \xi$  par construction de  $\xi_L$ . On a ainsi la convergence annoncée sur  $\mathcal{T} \cup \bigcup_{L \in \mathbb{N}} K_L = M$ .  $\square$

### 2.1.6 Formes équipées

La notion de pseudo-gradient a été définie de sorte qu'elle ait un sens aussi quand la 1-forme associée n'est pas de type Morse. La raison principale étant que pour une famille à un paramètre de formes, la propriété d'être Morse à tout instant n'est pas générique.

Nous rappelons qu'une propriété  $\mathcal{P}$  pour les familles à  $k$ -paramètres dans  $E$  est dite générique si le sous-ensemble de  $\mathcal{C}^\infty([0, 1]^k, E)$  défini par la propriété  $\mathcal{P}$  est résiduel pour la topologie  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Définition 2.1.43.** *Un équipement pour une 1-forme fermée  $\alpha$  est la donnée d'un couple  $(\xi, B) \in G(\alpha)$ . On peut ainsi voir les formes équipées<sup>3</sup> comme un sous-espace de  $\widehat{\Omega}^u := \Omega^u \times G$ . On note par  $\widehat{\Omega}_{NS}^u := \Omega_{NS}^u \times G$  l'espace contenant les 1-formes non-singulières équipées.*

## 2.2 Familles de formes équipées

Dans cette section, on invite le lecteur à consulter certaines notions relatives aux *stratifications*, présentes dans [Ce, Ch. 1, §1], notamment celles de stratification localement triviale et stratification produit.

### 2.2.1 Familles de 1-formes

On sait que la propriété d'être Morse pour une 1-forme  $\alpha$  est générique. Cependant, si on considère une famille à un paramètre de 1-formes, la propriété d'être partout Morse, ne l'est plus.

**Lemme 2.2.1.** *La partition  $\{\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_R\}$  de 2.1.2 est une stratification localement triviale de l'espace de 1-formes fermées  $\mathcal{Z}$ .*

*Démonstration.* L'observation clé est qu'une 1-forme fermée  $\alpha$  est localement indistinguishable d'une fonction différentiable  $f$ , à une constante  $c$  près. L'espace des fonctions différentiables est stratifié par une notion locale de codimension « à la source » : celle de la codimension des points critiques de  $f$  comme fait [Ce, Ch. 1, §3]. On ne tient pas compte de la notion de codimension des valeurs critiques de  $f$ , vu que la notion de valeur critique n'est pas bien définie pour une 1-forme  $\alpha$ , dû à l'indétermination de la constante  $c$ . La notion locale de codimension d'un point critique  $p$  d'une fonction  $f$  de [Ce, Ch. 1, §3] se traduit en celle de codimension d'un zéro  $p$  d'une 1-forme  $\alpha$  que nous avons donné dans la définition 2.1.2. L'espace de 1-formes fermées hérite ainsi de la stratification de l'espace de fonctions différentiables par la codimension des points critiques de Cerf.  $\square$

**Lemme 2.2.2.** *L'espace  $\Omega^u$  des 1-formes fermées dans la classe  $u$  admet une stratification localement triviale que l'on note par  $\{\Omega_0^u, \Omega_1^u, \Omega_2^u, \Omega_R^u\}$  et qui est aussi induite par la codimension au sens de 2.1.2.*

*Démonstration.* Il suffit de considérer la stratification induite dans  $\Omega^u$  par celle de 2.2.1 qui est définie par  $\Omega_i^u := \Omega^u \cap \mathcal{Z}_i$ .  $\square$

**Proposition 2.2.3.** *Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0, 1]^k}$  une famille à  $k$ -paramètres de 1-formes dans la classe  $u$ , où  $k \in \{0, 1, 2\}$ . La propriété de  $\alpha_\bullet : [0, 1]^k \rightarrow \Omega^u$  d'être transverse à la stratification de  $\Omega^u$  est générique pour ces familles. Compte tenu des codimensions des strates, ceci équivaut à :*

---

3. On voit ainsi la donnée  $B$  de l'équipement comme un « origine » (point base) de la fibre de  $\xi$  dans le revêtement  $G(\alpha) \rightarrow \mathcal{G}(\alpha)$ .



1.  $\alpha_\bullet$  évite les strates de codimension supérieure à  $k$  :

$$\alpha_\bullet : [0, 1]^k \rightarrow \bigcup_{i=0}^k \Omega_i^u$$

2. Si  $k = 1$ , il existe un ensemble fini, noté par  $S = \{t_1, \dots, t_s\} \subseteq ]0, 1[$  et que l'on appelle temps de stabilisation, où  $\alpha_\bullet$  traverse transversalement la strate des naissances/éliminations.
3. Si  $k = 2$ , il existe une sous-variété de dimension un, noté par  $S \subseteq [0, 1]^2 \setminus \{0, 1\}^2$ , où  $\alpha_\bullet$  est de naissance/élimination et deux ensembles finis  $Q, D \subseteq ]0, 1]^2$  où
- $\alpha_t$  est queue d'aronde si  $t \in Q$ .
  - $\alpha_t$  présente deux zéros naissance/élimination si  $t \in D$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème de transversalité de Thom ([Tho], ou [GG]) à l'espace de jets  $J^1([0, 1]^k, M)$  relatif aux strates  $\{\Omega_0^u, \Omega_1^u, \Omega_2^u, \Omega_R^u\}$  de  $\Omega^u$  définies dans le lemme 2.2.1.  $\square$

On pose ainsi :

**Définition 2.2.4.** Une famille à  $k$ -paramètres de 1-formes dans la classe  $u$  sera dite générique si elle est transverse à la stratification de  $\Omega^u$ .

La figure 2.1 est un exemple de comment  $S, D, Q$  peuvent s'arranger dans  $[0, 1]^2$  pour une certaine famille générique à deux paramètres.

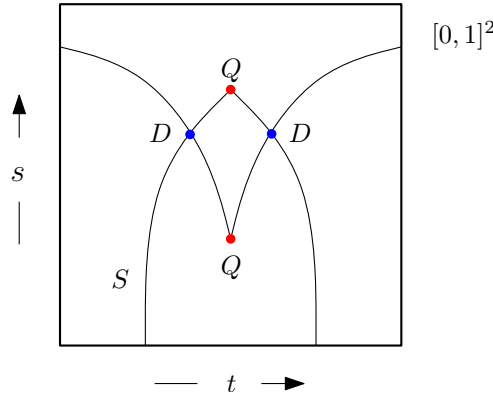


FIGURE 2.1 – Trace de la stratification dans l'espace de paramètres

Pour travailler avec des familles à  $k$  paramètres<sup>4</sup> de 1-formes, on utilisera souvent les primitives associées :

**Définition 2.2.5.** Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0, 1]^k}$  une famille à  $k$  paramètres de 1-formes fermées dans la classe  $u$ . On dit que  $(\alpha_t)_{t \in [0, 1]^k}$  est munie de primitives si on a fait un choix lisse primitives  $(h_t)_{t \in [0, 1]^k}$ , où  $h_t \in C^\infty(\widetilde{M})$  est une primitive de  $\alpha_t$  comme dans l'introduction de la section 2.1.4. En d'autres termes, c'est la donnée d'une fonction lisse :

$$h \in C^\infty([0, 1]^k \times \widetilde{M}) \text{ telle que } \pi^* \alpha_t = dh_t \text{ pour tout } t \in [0, 1]^k.$$

4. On ne traite des cas où  $k = 0, 1, 2$ .



### 2.2.2 Modèles locaux

Voyons que tout moment de traversée transverse de la strate  $\Omega_1^u$  d'un chemin générique de 1-formes dans la classe  $u$  admet une modélisation locale.

**Définition 2.2.6.** Soit  $N$  une variété de dimension  $n + 1$ . Notons par  $\mathbb{D}^i$  le disque unitaire fermé de  $\mathbb{R}^i$ . Un cylindre dans  $N$  est la donnée d'un cylindre plongé  $C = \psi(\mathbb{D}^i \times [-1, 1]) \subseteq N$ . On note par

- $C^\pm := \psi(\mathbb{D}^i \times \{\pm 1\})$ , que l'on appelle les couvercles supérieur et inférieur du cylindre,
- $\partial_{\text{lat}} C := \psi(\partial \mathbb{D}^i \times [-1, 1])$ , que l'on appelle le bord latéral du cylindre.

□

**Définition 2.2.7.** Soit  $\alpha$  une 1-forme munie d'une primitive  $h : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $C$  un cylindre dans  $\widetilde{M}$ . On dit que  $C$  est adapté à  $\alpha$  si les conditions suivantes sont vérifiées :

- La restriction  $\pi|_C$  est injective,
- les couvercles  $C^\pm$  sont dans des niveaux de  $h$ ,
- la restriction  $h|_{\partial_{\text{lat}} C}$  est sans point critique.

□

Le déploiement universel (consulter [Mar, Ch. XIV]) du point critique de type naissance d'indice  $i$  donné par la fonction qui apparait dans (b) de 2.1.1 est donné par le modèle de naissance d'indice  $i$  :

**Définition 2.2.8.** Soit  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Le modèle de naissance d'indice  $i$  centré en  $t = t_0$  est la famille à un paramètre de fonctions

$$\begin{aligned} F_t^i : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x_1^2 + \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 + (x_{n+1}^3 - (t - t_0)x_{n+1}) \end{aligned}$$

**Définition 2.2.9.** On appelle chemin de naissance d'indice  $i$  centré en  $t_0$  un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$ , de primitives  $(h_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$ , pour lequel il existe un chemin de cylindres  $(C_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$  tels que :

- pour tout  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  le cylindre  $C_t$  est adapté à  $\alpha_t$  et
- la famille  $(\alpha_t|_{\pi(C_t)})_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$  est semi-conjugée au modèle de naissance d'indice  $i$  centré en  $t_0$  : il existe une famille à un paramètre de plongements  $\varphi_t : C_t \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  et une autre de difféomorphismes  $\psi_t \in \text{Diff}(\mathbb{R})$  telles que pour tout  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  on a  $F_t^i \circ \varphi_t = \psi_t \circ h_t$  :

$$\begin{array}{ccc} C_t & \xrightarrow{h_t} & \mathbb{R} \\ \varphi_t \downarrow & & \downarrow \psi_t \\ \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{F_t^i} & \mathbb{R} \end{array}$$

On dit que le chemin de naissance est issu de  $\alpha_{t_0 - \varepsilon}$  et qu'il est modelé par les cylindres  $(C_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$ .

**Définition 2.2.10.** On appelle chemin d'élimination d'indice  $i$  centré en  $t_0$  un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$  tel que  $(\alpha_{-t})_{t \in [-(t_0 + \varepsilon), -(t_0 - \varepsilon)]}$  est un chemin de naissance d'indice  $i$  centré en  $-t_0$ . Si ce dernier chemin de naissance est modelé par  $(C_{-t})_{t \in [-(t_0 + \varepsilon), -(t_0 - \varepsilon)]}$ , on dit que le chemin d'élimination est modelé par les cylindres  $(C_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$ . On dit aussi que le chemin d'élimination finit en  $\alpha_{t_0 + \varepsilon}$ .

**Remarque 2.2.11.**

On remarquera qu'un chemin d'élimination n'est rien d'autre qu'un chemin de naissance parcouru dans le sens opposé.

**Théorème 2.2.12.** Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0, 1]}$  un chemin générique muni de primitives  $(h_t)_{t \in [0, 1]}$  et  $t_0$  un temps de naissance d'indice  $i$ . Alors il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $(\alpha_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$  est un chemin de naissance d'indice  $i$  centré en  $t_0$ .

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser le déploiement universel de la singularité  $x_{n+1}^3$  comme dans [Mar, Ch. IV, §6]. □

Le théorème suivant explique comment obtenir un chemin de naissance à partir d'un cylindre adapté et feuilleté en disques par les niveaux de la primitive, ainsi qu'une version à un paramètre.

**Théorème 2.2.13.** Soit  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

1. Si  $\alpha_0$  est une 1-forme munie d'une primitive  $h_0$  et  $C_0$  est un cylindre adapté à  $\alpha_0$  de sorte  $\alpha_0|_{\pi(C_0)}$  est semi-conjugue à l'extrémité initiale  $F_{-\varepsilon}^i$  du modèle de naissance d'indice  $i$  centré en 0, alors il existe un chemin de naissance  $(\alpha_t)_{t \in [0, 2\varepsilon]}$  d'indice  $i$  issu de  $\alpha_0$  dont le chemin des cylindres le modelant commence en  $C_0$ .
2. Si  $(\alpha_t)_{t \in [a, b]}$  est un chemin générique muni de primitives  $(h_{t,0})_{t \in [a, b]}$  et de cylindres  $(C_{t,0})_{t \in [a, b]}$  tels que pour tout  $t \in [a, b]$ 
  - le cylindre  $C_{t,0}$  est adapté à  $\alpha_t$ ,
  - la 1-forme  $\alpha_t|_{\pi(C_{t,0})}$  est semi-conjugue à l'extrémité initiale  $F_{-\varepsilon}^i$  du modèle de naissance d'indice  $i$  centré en 0,
et si  $(\beta_{b,s})_{s \in [0, 2\varepsilon]}$  est un chemin de naissance d'indice  $i$  issu de  $\alpha_b$ , muni de primitives  $(h_{b,s})_{s \in [0, 2\varepsilon]}$  et modelé par des cylindres  $(C_{b,s})_{s \in [0, 2\varepsilon]}$ , alors il existe une famille, paramétrée par  $t \in [a, b]$ , de chemins de naissance  $(\beta_{t,s})_{s \in [0, 2\varepsilon]}$  issus de  $\alpha_t$  modelé par des familles des cylindres  $(C_{t,s})_{s \in [0, 2\varepsilon]}$  qui étend ceux qui ont été donnés.

*Démonstration.* La première partie de l'énoncé est triviale. Il suffit de remarquer que l'on peut prendre la famille de plongements constante  $\varphi_t = \varphi_0$  pour tout  $t \in [0, 2\varepsilon]$  ; on trouve des fonctions  $(h_t : C_0 \rightarrow \mathbb{R})_{t \in [0, 2\varepsilon]}$  stationnaires près du bord de  $C_0$  et qui font commuter le diagramme de 2.2.9. Grâce à l'injectivité de  $\pi|_{C_0}$ , on retrouve un chemin de 1-formes  $(\alpha_t)_{t \in [0, 2\varepsilon]}$  qui convient. La deuxième est une version adaptée de [Lau1, Lemme 2.4] : il suffit de prendre une famille de difféomorphismes  $(\Psi_{t,s} : C_{t,0} \rightarrow C_{b,s})_{(t,s) \in [a, b] \times [0, 2\varepsilon]}$  qui respectent le feuilletage par des disques près des bords et telle que  $\psi_{b,0} = \text{Id}$ . Ainsi, les primitives  $h_{t,s} := h_{b,s} \circ \Psi_{t,s}$  induisent la famille de 1-formes annoncée, grâce à l'injectivité de la projection  $\pi$  sur  $C_{t,0}$  pour tout  $t \in [a, b]$ . □

La version pour les fonctions réelles du théorème suivant est appelée *lemme d'unicité des naissances* par Cerf ([Ce, Ch. III, §1, Cor. 2]). Dans l'article cité, Cerf ramène un chemin de traversée de la strate de naissance d'indice  $i$  quelconque sur un chemin de naissance dit élémentaire. Il démontre ensuite que l'espace des dits chemins est connexe. Dans notre étude, on a évité la première étape de se ramener à un chemin élémentaire, en donnant une définition plus souple (2.2.9) de chemin de naissance. L'application classique de l'unicité de naissances dans le contexte de fonctions réelles (voir [HW, Ch.V, (0.1)]) admet un analogue dans le contexte des 1-formes fermées que l'on expliquera dans le lemme 3.3.8.

**Théorème 2.2.14.** *[Unicité des naissances] L'espace des chemins de naissance d'indice  $i$  issus de  $\alpha_0$  est connexe.*

*Démonstration.* Étudier la connexité de l'espace de chemins de naissance d'indice  $i$  issus de  $\alpha_0$  revient à étudier la connexité de l'espace de cylindres adaptés à  $\alpha_0$  qui sont feuilletés par les niveaux d'une primitive  $h_0$  par des disques. Notons par  $C_0$  un tel cylindre. Soit  $x \in \widetilde{M} \setminus \text{Crit}(h_0)$ ; on peut supposer que  $C_0$  contient  $x$  dans son intérieur : n'importe quel autre point base  $y \in \widetilde{M} \setminus \text{Crit}(h_0)$  peut être relié à  $x$  sans sortir de  $\widetilde{M} \setminus \text{Crit}(h_0)$  : l'espace  $\widetilde{M} \setminus \text{Crit}(h_0)$  est connexe vu que  $\text{Crit}(h_0)$  est isolé dans  $\widetilde{M}$  et  $\dim(M) > 1$ .

N'importe quel autre cylindre  $C'_0$  adapté à  $\alpha_0$  contenant  $x$  et feuilleté par les niveaux de  $h_0$  en disques est homotope à  $C_0$  parmi ces cylindres : si  $D$  désigne une petite boule telle que  $x \in B \subseteq C_0 \cap C'_0$  et  $(\psi_t : B \rightarrow B)_{t \in [0,1]}$  désigne une isotopie de  $B$  qui porte le feuilletage de  $C_0 \cap B$  sur celui de  $C'_0 \cap B$ , il suffit de prolonger cette isotopie en une famille  $(\widetilde{\psi}_t : C_0 \rightarrow C'_0)_{t \in [0,1]}$  qui préserve les niveaux de  $h_0$  et telle que  $\widetilde{\psi}_1$  amène le feuilletage de  $C_0$  sur celui de  $C'_0$ .  $\square$

On finit la section avec un modèle qui sera utilisé au moment de construire un lacet en queue d'aronde (voir la section 3.2).

**Définition 2.2.15.** *Soit  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Le modèle de queue d'aronde descendante d'indice  $i + 1$  centré en  $(t_0, s_0)$  est la famille à deux paramètres de fonctions*

$$\begin{aligned} G_{t,s}^{i+1} : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -x_1^2 + \dots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 - (x_{n+1}^4 + (s - s_0)x_{n+1}^2 + (t - t_0)x_{n+1}) \end{aligned}$$

Ce modèle est le déploiement universel du point critique, de type queue d'aronde d'indice  $i + 1$ , de la fonction qui apparaît dans (c) de 2.1.1, consulter [HW, Ch.1, §3, Exemple 2].

**Définition 2.2.16.** *On appelle famille en queue d'aronde descendante d'indice  $i + 1$  centré en  $(t_0, s_0) \in ]0, 1[^2$  une famille à deux paramètres  $(t, s) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$  de 1-formes  $\alpha_{t,s}$  munie de primitives  $h_{t,s}$  pour laquelle il existe une famille de voisinages adaptés  $U_{t,s}$  tels que :*

1.  $U_{t,s}$  est adapté<sup>5</sup> à  $\alpha_{t,s}$  pour tout  $(t, s) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$ ,

---

5. Par voisinage adapté on comprend que

- la projection  $\pi|_{U_{t,s}}$  est injective,
- le bord  $\partial U_{t,s}$  se décompose en trois morceaux (en général non-connexes) :  $\partial_{\text{lat}} U_{t,s}$  constitué des trajectoires de  $\xi_{t,s}$ , et  $U_{t,s}^\pm$  qui sont contenus dans des niveaux de  $h_{t,s}$  et
- la restriction  $h_{t,s}|_{U_{t,s}}$  est sans point critique.

2. la famille  $\alpha_{t,s}|_{U_{t,s}}$  est semi-conjugée au modèle de queue d'aronde descendante d'indice  $i + 1$  centré en  $(t_0, s_0)$ . Plus explicitement, il existe une famille à deux paramètres de plongements  $\varphi_{t,s} : U_{t,s} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  et une autre de difféomorphismes  $\psi_{t,s} \in \text{Diff}(\mathbb{R})$  telles que pour tout  $(t, s) \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon]$  on a  $G_{t,s}^{i+1} \circ \varphi_{t,s} = \psi_{t,s} \circ h_{t,s}$  :

$$\begin{array}{ccc} U_{t,s} & \xrightarrow{h_{t,s}} & \mathbb{R} \\ \varphi_{t,s} \downarrow & & \downarrow \psi_{t,s} \\ \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{G_{t,s}^{i+1}} & \mathbb{R} \end{array}$$

### 2.2.3 Chemins de 1-formes basée, taille et graphique de Cerf-Novikov

Le lemme suivant donne du sens à « suivre un point critique par continuité ».

**Lemme 2.2.17.** Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  une famille lisse à un paramètre de 1-formes munie de primitives  $(h_t)_{t \in [0,1]}$ . Soit  $t_0 \in [0, 1]$  et  $P \in \text{Crit}(h_{t_0})$  de Morse. Il existe un intervalle ouvert  $J \subset [0, 1]$ , un ouvert  $U$  de  $\widetilde{M}$  contenant  $P$  et une application lisse  $\phi : J \rightarrow U$  telle que pour tout  $(s, Q) \in J \times U$  on a

$$Q \in \text{Crit}(h_s) \text{ si et seulement si } Q = \phi(s)$$

*Démonstration.* L'existence d'une telle  $\phi$  découle d'une application directe du théorème des fonctions implicites compte tenue du fait que le point critique  $P$  est de Morse.  $\square$

**Définition 2.2.18.** Soit  $P$  un zéro de Morse d'un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ . On note par  $J_P \subseteq [0, 1]$  l'intervalle maximal où on peut trouver un  $\phi_P$  comme dans 2.2.17. On dit que l'on suit  $P$  par continuité quand on se donne un tel

$$\phi_P : J_P \rightarrow \widetilde{M}$$

que l'on appelle brin de  $P$ . Le nombre entier  $\text{ind}(P)$  est aussi appelé l'indice du brin  $\phi_P$ .

**Définition 2.2.19.** Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin générique de 1-formes. Un choix de relevés pour le chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est la donnée d'un choix de relevés des zéros de naissance ainsi que des zéros initiaux  $Z(\alpha_0)$  qui sont tous de Morse. On note un tel choix par  $B^\alpha$ .

**Lemme 2.2.20.** Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin générique de 1-formes. Un choix de relevés  $B^\alpha$  pour  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  détermine un et un seul relevé continu de chaque zéro au sens de 2.2.18, excepté pour les zéros d'élimination.

*Démonstration.* Soit  $z \in Z(\alpha_{t_0})$  pour un certain  $t_0 \in [0, 1]$ . On distingue trois cas :

Premier cas : Si  $z$  est de Morse. Prenons  $P$  un relevé quelconque de  $z$ . Comme il est de Morse, on peut le suivre par continuité : on prend son brin  $\phi_P : J_P \rightarrow \widetilde{M}$  et on note  $N_P := \inf J_P$  et  $E_P := \sup J_P$ . Le brin  $\phi_P$  s'étend continûment en  $\Phi_P : [N_P, E_P] \rightarrow \widetilde{M}$  et on appelle

$$\begin{aligned} D(P) &:= \Phi_P(N_P) \in \widetilde{M} && \text{le début du brin } \phi_P \\ F(P) &:= \Phi_P(E_P) \in \widetilde{M} && \text{la fin du brin } \phi_P \end{aligned}$$

Comme  $J_P$  est ouvert,  $N_P \notin J_P$ , mais par continuité de  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ ,  $D(P)$  est un relevé d'un zéro de  $\alpha_{N_P}$ . On a la dichotomie suivante :

- Soit  $N_P = 0$ . Ceci veut dire que le brin  $\phi_P$  relie un relevé  $P_0$  d'un zéro de Morse de  $\alpha_{t_0}$  avec  $P$ . Ainsi,  $B^\alpha$  détermine un relevé de  $z$  quand on suit par continuité le brin du seul  $P'_0 \in B^\alpha$  tel que  $gP'_0 = P_0$  pour un certain  $g \in \pi_1 M$ .
- Soit  $N_P > 0$ . Dans ce cas,  $D(P)$  est obligé à être non-Morse par définition de  $\inf J_P$ . Il est ainsi de naissance et donc, le début  $D(P)$  est égal à  $gB$  pour des uniques  $B \in B^\alpha, g \in \pi_1 M$ . On va voir tout de suite dans le deuxième cas, qu'un point de naissance du revêtement détermine deux brins. Un de ceux deux brins contient ainsi un relevé de  $z$  par  $\pi_1 M$ -équivalence, du fait que le brin de  $P$  relie  $gB$  à  $P$ .

Deuxième cas : Si  $z$  est de naissance. Par définition de  $B^\alpha$ , il existe un seul  $B^j \in B^\alpha$  tel que  $\pi(B^j) = z$ . Prenons des cylindres  $(C_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$  qui modèlent le chemin de naissance  $(\alpha_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$  de sorte que  $B^j \in C_{t_0}$ . Si  $i$  désigne l'indice de  $z$ , on trouve ainsi pour les  $t \in ]t_0, t_0 + \varepsilon[$ , deux uniques relevés  $P_t^j, Q_t^j \in C_t$  de deux zéros de Morse de  $\alpha_t$  d'indices respectifs  $i + 1, i$  dont les débuts de ses brins coïncident avec  $B^j$ .

Troisième cas : Si  $z$  est d'élimination. Notons par  $i = \text{ind}(z)$ . Prenons un relevé  $E$  de  $z$  choisi au hasard et  $t < t_0$  assez proche. De la même façon que dans le cas précédant, on trouve  $P'_t, Q'_t$  deux relevés uniques de  $p_t, q_t$ , deux zéros de Morse de  $\alpha_t$  d'indices  $i + 1, i$ . Ces points se placent dans le premier cas. Par  $\pi_1 M$ -équivalence, on trouve ainsi  $B^P, B^Q \in B^\alpha$  qui déterminent des relevés  $P_t, Q_t$  de  $p_t, q_t$  respectivement. La fin des brins de  $P_t, Q_t$  sont toutes les deux dans  $\pi_1 M \cdot \{E\}$ , mais elles n'ont aucune raison a priori de coïncider.  $\square$

**Convention 2.2.21.** On convient de choisir pour relevé d'un zéro d'élimination d'indice  $i$  la fin du brin du relevé du zéro de Morse d'indice  $i + 1$  qui contribue à cette élimination. Avec les notations de 2.2.20, il s'agit de  $F(P_t)$ , la fin du brin  $\phi_{P_t}$ .

**Définition 2.2.22.** Quand on parle d'un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  de 1-formes basé ou muni de relevés  $B_\bullet$ , on veut dire que  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est générique et que  $B_\bullet$  est déterminée par un certain choix de relevés  $B^\alpha$  au sens de 2.2.19, l'ambiguïté sur le choix des relevés d'élimination étant levée comme dans 2.2.21. On dira aussi que  $B_\bullet$  est un choix continu de relevés pour  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  ou encore que  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est basé par  $B^\alpha$ .

**Définition 2.2.23** (Graphique de Cerf-Novikov). Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  une famille à un paramètre générique de 1-formes dans la classe  $u$ , munie des primitives  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  et de relevés  $B_\bullet$ . Le graphique de Cerf-Novikov associé à la famille  $B_\bullet$  est le sous-ensemble de  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  déterminé par

$$\text{Gr}(B_\bullet) := \{(t, z) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \mid \exists P \in B_t : z = h_t(P)\} = \bigcup_{t \in [0,1]} \{t\} \times h_t(B_t)$$

Bien que deux choix de primitives différents donnent lieu à des graphiques différents, la position relative des brins reste invariante : deux primitives ne peuvent différer que d'une constante additive.

**Exemple 2.2.24.** Un chemin basé  $((\alpha_t)_{t \in [0,1]}, B_\bullet^\alpha)$  peut avoir son graphique de Cerf-Novikov comme celui de la figure 2.2. La famille  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est à extrémités non singulières et le choix de relevés est  $B^\alpha = \{B^1, B^2\}$  où  $\{b^1, b^2\}$  désignent les naissances du chemin, en l'occurrence de même indice. On note par  $P_t^j, Q_t^j \in B_t^\alpha$  les relevés des zéros de Morse déterminés par  $B^j$ . Les relevés des zéros d'élimination déterminés par  $B^\alpha$  sont notés par  $\{E^1, E^2\}$ .

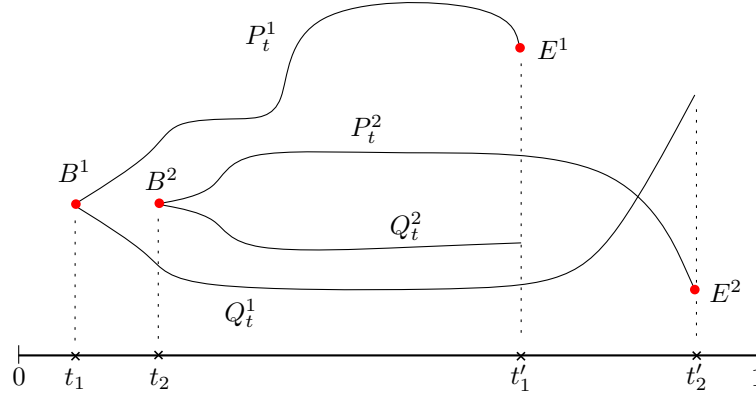


FIGURE 2.2 – Graphique de Cerf-Novikov de  $((\alpha_t)_{t \in [0,1]}, B_\bullet^\alpha)$

On remarque que la fin des brins des points d'indice  $i$  issus d'une naissance d'indice  $i$  ne font pas forcément partie du graphique ; leurs brins peuvent être « ouverts à droite ». La figure 2.3 permet de visualiser quels sont les relevés des zéros de Morse qui ont participé aux éliminations dans cet exemple.  $\square$

Une notion qui se lit facilement sur le graphique est celle de la taille :

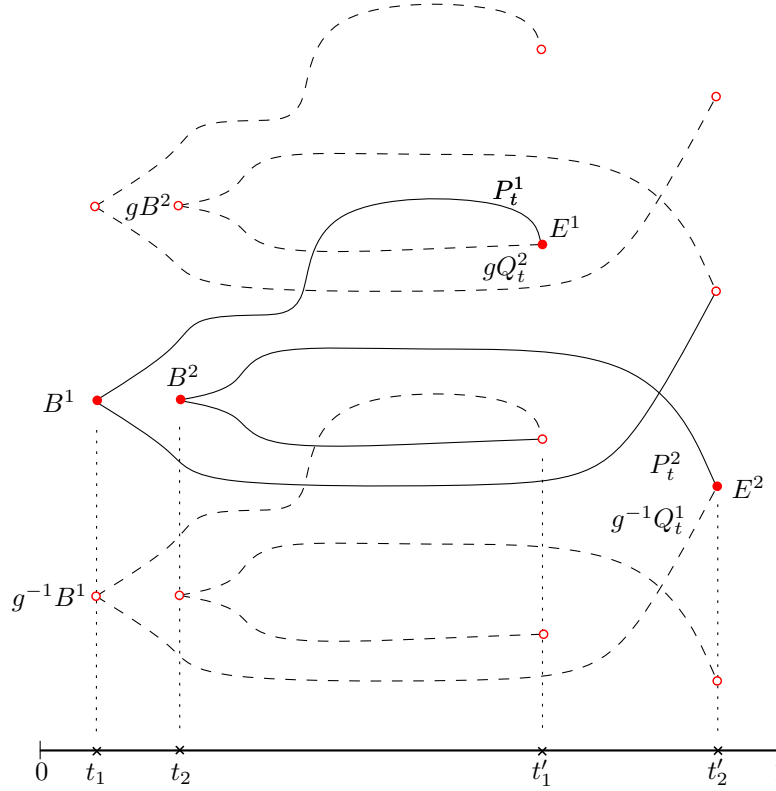
**Définition 2.2.25.** On définit la taille d'un chemin de 1-formes basé  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  et muni de primitives  $h_\bullet$  par la plus grande de tailles au sens de 2.1.24 :

$$T_{B_\bullet} := \max_{0 \leq t \leq 1} T_{B_t}$$

Le choix des primitives n'a évidemment aucune influence sur la taille, tandis qu'un choix de relevés différents, la modifie par ajout d'un  $c \in \text{Im}(u)$ , tout en la laissant positive.

## 2.2.4 Chemins de pseudo-gradients basés. Liaisons $L$ -élémentaires

La propriété d'être partout Morse-Smale n'est pas générique pour une famille à un paramètre de champs  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ . On pourrait espérer un comportement analogue à celui des formes (cf. dans 2.2.1), notamment que  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  soit Morse-Smale sauf dans un nombre fini d'instants : ceci n'est pas vrai car  $\mathcal{G}^0(\alpha)$  est loin d'être un ouvert de  $\mathcal{G}(\alpha)$  comme on a vu dans 2.1.42 – même s'il est résiduel (2.1.20) – et un chemin générique dans  $\mathcal{G}(\alpha)$  peut sortir de  $\mathcal{G}^0(\alpha)$  une infinité des fois.

FIGURE 2.3 – Graphique de Cerf-Novikov et certains de ses déplacements par l'action de  $\pi_1 M$ 

Pour avoir une situation analogue à celle des 1-formes quand on prend un chemin générique de pseudo-gradients, on s'est placé dans un espace plus grand que celui des champs Morse-Smale, à savoir, l'ouvert des champs de vecteurs  $L$ -transverses (voir le lemme 2.1.41). On définit une classe de pseudo-gradients qui sont « presque  $L$ -transverses » ci-dessous.

**Définition 2.2.26** (Pseudo-gradients basés avec une liaison  $L$ -élémentaire). *Soit  $(\xi, B) \in G$  avec  $\xi$  hyperbolique. On dit que  $\xi$  a une liaison  $L$ -élémentaire s'il existe un  $L \in \mathbb{R}$  tel que :*

1.  $\xi$  vérifie la condition de la déf. 2.1.34 pour tout couple ordonné de points  $P, Q \in B$  sauf pour un seul couple  $(P^l, P^k)$  de zéros de même indice ;
2. il y a une unique liaison  $\ell$ , que l'on appelle  $L$ -élémentaire, de  $u$ -enroulement supérieur à  $-L$  allant de  $p^l$  vers  $p^k$  ;
3. pour tout point  $x \in \ell$ , on a  $T_x W^u(p^l) \cap T_x W^s(p^k) = T_x \ell$ .

La liaison  $\ell$  est appelée la liaison  $L$ -élémentaire de  $\xi$ , et on dit que  $\xi$  a une liaison  $L$ -élémentaire. L'espace de ces pseudo-gradients basés est noté  $G_L^1$ . Si on considère le sous-espace de ceux qui sont adaptés à une 1-forme  $\alpha$ , on le note par  $G_L^1(\alpha)$ .

**Remarque 2.2.27.** Remarquons que nous n'imposons pas que  $p^l \neq p^k$  ! Dans ce cas, si  $g$  désigne l'enroulement d'une liaison  $L$ -élémentaire  $\ell$ , on connaît sa longueur grâce à 2.1.25 ; elle vaut  $L(\ell) = -u(g)$ . D'après la condition 2 de 2.2.26, la seule liaison de longueur inférieure ou égale à



$-u(g)$  est  $\ell$  :

$$\mathcal{L}_{-u(g)}(p^k, p^k) = \{\ell\}$$

**Lemme 2.2.28.** Soit  $L \in \mathbb{R}$ . Notons par  $G_L^R := G \setminus (G_L^0 \cup G_L^1)$ .

La partition  $\{G_L^0, G_L^1, G_L^R\}$  est une stratification de l'espace de pseudo-gradients basés  $G$  que nous appelons stratification  $L$ -élémentaire.

*Démonstration.* Voyons d'abord que  $G_L^1$  est une sous-variété de codimension un dans  $G_L^0 \cup G_L^1$  : pour tout  $\xi \in G_L^1$ , ils existent  $O_\xi, U_\xi$  des voisinages de  $\xi$  respectivement dans  $G_L^1, G_L^0 \cup G_L^1$  et un difféomorphisme  $\psi : O_\xi \times ]-1, 1[ \rightarrow U_\xi$  tel que  $\psi^{-1}(G_L^1) = O_\xi \times \{0\}$ . En particulier, le modèle transverse à  $G_L^1$  est un intervalle et un *chemin de traversée*<sup>6</sup> de  $G_L^1$  est donné par  $\psi(\{\xi\} \times ]-1, 1[)$ . Un chemin de traversée est décrit dans la proposition 2.2.36.

Décrivons la situation linéarisée autour d'un  $\xi \in G_L^1$ . Soit  $x \in \ell$  un point de sa liaison  $L$ -élémentaire qui va de  $p^l$  vers  $p^k$ , deux zéros d'indice  $i$  de  $\alpha$ . Les espaces tangents  $T_x W^u(p^l; \xi)$  et  $T_x W^s(p^k; \xi)$  sont de dimension complémentaire et leur intersection est dirigée par une seule direction commune donnée par  $\xi(x)$ . Ainsi la somme  $T_x W^u(p^l; \xi) + T_x W^s(p^k; \xi) = H$  est un hyperplan de  $T_x M$ , et ce pour tout  $x \in \ell$ . Si  $\text{Gr}_i(V)$  désigne la grassmannienne de  $i$ -plans de l'espace vectoriel  $V$ , on a que

$$\mathcal{H}_x := \{(W^u, W^s) \in \text{Gr}_i(T_x M) \times \text{Gr}_{n-i+1}(T_x M) \mid \dim(W^u + W^s) = n\}$$

est une sous-variété de codimension un de  $\text{Gr}_i(T_x M) \times \text{Gr}_{n-i+1}(T_x M)$ . Mais cette condition s'intègre : si on considère un voisinage ouvert  $U_\xi$  de  $\xi$  dans  $G_L^0 \cup G_L^1$  pour la topologie  $\mathcal{C}^\infty$ , les  $\xi' \in U_\xi \cap G_L^1$  sont juste ceux qui « rencontrent »  $\mathcal{H}$ . Plus précisément, un  $\xi' \in U_\xi \cap G_L^1$  contient une seule liaison  $\ell' \in \mathcal{L}(p^l, p^k)$  dans un petit voisinage tubulaire de  $\ell$  de sorte que pour tout  $x' \in \ell'$  on ait  $(T_{x'} W^u(p^l; \xi'), T_{x'} W^s(p^k; \xi')) \in \mathcal{H}_{x'}$ .

Du fait que  $G_L^1$  soit une sous-variété de  $G_L^0 \cup G_L^1$ , comme  $G_L^0$  est un ouvert de  $G$ , on déduit que  $G_L^0 \cup G_L^1$  est aussi ouvert dans  $G$  et que  $(G_L^0, G_L^1)$  est une stratification de codimension un<sup>7</sup> de  $G_L^0 \cup G_L^1$ .  $\square$

**Remarque 2.2.29.** Il n'est pas vrai que  $G_L^R$  est de codimension au moins 2 dans  $G$ . Autrement dit, donné un  $\xi \in G_L^0$ , on n'a pas en général que l'application induite par l'inclusion  $i_* : \pi_1(G_L^0 \cup G_L^1; \xi) \rightarrow \pi_1(G; \xi)$  soit surjective (comparer à [Ce, Ch.1, §3.1, Descr.  $\mathcal{F}^1, 2^\circ$ ]). Ceci est dû à la présence d'une strate  $G_L^W \subseteq G_L^R$ , aussi de codimension un, que l'on appelle *de Whitney*. Cependant, les complexes de Morse-Novikov, tronqués ou non, ne souffrent pas de changement algébrique lors d'un chemin de traversée de cette strate : deux liaisons  $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}(p, q)$ ,  $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 1$ , de même enroulement  $g$  et signes opposés apparaissent ou s'annulent mutuellement ; au moment de passage par  $\xi' \in G_L^W$ , on trouve une liaison  $\ell'$  de  $p$  à  $q$ , d'enroulement  $g, u(g) \geq -L$ , le long de laquelle l'intersection  $W^u(p; \xi') \cap W^s(q; \xi')$  n'est pas transverse. Il est facile de voir que l'espace de chemins dans  $G_L^0 \cup G_L^1 \cup G_L^W$  est dense pour la topologie  $\mathcal{C}^0$  dans l'espace de chemins dans  $G$ . Autrement dit,  $G_L^R \setminus G_L^W$  est de codimension au moins 2 dans  $G$ .

6. La terminologie de chemin de traversée est due à Cerf (voir [Ce, Ch.I, §2.1, Df.2]).

7. Aussi au sens de Cerf : [Ce, Ch.1, §2.1, Df.1]



### 2.2.5 Chemins de formes équipées et $L$ -transversalité à paramètre

**Définition 2.2.30.** *Un équipement pour un chemin générique  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  de 1-formes muni de primitives  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  est la donnée d'un chemin de pseudo-gradients basés  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  tel que :*

- les relevés  $B_\bullet$  sont choisis par continuité comme dans 2.2.22,
- pour tout  $t \in [0, 1]$  le pseudo-gradient basé  $(\xi_t, B_t)$  équipe  $\alpha_t$  (voir 2.1.43) et
- si  $t_0$  est un temps de stabilisation de  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  et un chemin de cylindres  $(C_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$  qui modèlent (au sens de 2.2.9 ou de 2.2.10) le chemin de naissance/élimination  $(\alpha_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$  tels que  $\xi_t|_{\pi(C_t)} = \pi_*(-\nabla h_t)$  pour tout  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ .

**Définition 2.2.31.** *Soit  $L \in \mathbb{R}$  et  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  une famille générique à un paramètre de 1-formes. Notons par  $S$  les temps de stabilisation (cf. dans 2.2.3).*

*Un équipement  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  pour  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est dit  $L$ -transverse si :*

1. *l'application  $(\xi_\bullet, B_\bullet)$  est à valeurs dans  $G_L^0 \cup G_L^1$ , ne rencontrant  $G_L^1$  que dans un nombre fini d'instants  $R \subseteq ]0, 1[$ , et toujours de façon transverse. Ces temps sont appelés temps de glissement ;*
2. *les temps de stabilisation et de glissement sont différents ( $R \cap S = \emptyset$ ).*

*Un tel équipement  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  pour un chemin de 1-formes de Morse ( $S = \emptyset$ ) avec un seul temps de glissement ( $R = \{t_0\}$ ), est appelé un glissement  $L$ -élémentaire.*

**Lemme 2.2.32.** *Soit  $t_0$  un temps de glissement d'un équipement  $L$ -transverse  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  pour un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  générique. On peut associer un signe  $\epsilon(\ell) = \pm 1$  à la liaison  $L$ -élémentaire  $\ell$  de  $\xi_{t_0}$ .*

*Démonstration.* Comme l'équipement est  $L$ -transverse, on trouve un  $\varepsilon > 0$  tel que  $(\alpha_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$  n'est constitué que de 1-formes de Morse. On prend un  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour que l'intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  ne contienne pas de temps de croisement des valeurs critiques associés aux relevés  $B_t$  ; quitte à appliquer une isotopie, on peut supposer que les relevés  $B_t$  coïncident avec  $B_{t_0}$  pour tout  $t$  dans l'intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ . Soient  $p^l, p^k$  les zéros de même indice  $i = 0, \dots, n+1$  tels que  $\ell$  va de  $p^l$  vers  $p^k$  et notons l'enroulement de la liaison  $\ell$  par  $g$ . Les ensembles

$$\mathcal{W}^u(P^l) := \bigcup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \{t\} \times W^u(P^l; \tilde{\xi}_t) \quad \text{et} \quad \mathcal{W}^s(gP^k) := \bigcup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \{t\} \times W^s(gP^k; \tilde{\xi}_t).$$

sont plongés dans  $[0, 1] \times \widetilde{M}$ . Il est clair que  $\mathcal{W}^u(P^l)$  est de dimension  $i+1$  et  $\mathcal{W}^s(gP^k)$  de dimension  $n-i+2$  dans  $[0, 1] \times \widetilde{M}$  qui est de dimension  $n+2$ . Grâce à la  $L$ -transversalité de  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  on sait que  $\mathcal{W}^u(P^l)$  et  $\mathcal{W}^s(gP^k)$  s'intersectent transversalement le long de  $\{t_0\} \times \widetilde{\ell}$ , où  $\widetilde{\ell}$  désigne la liaison allant de  $P^l$  vers  $gP^k$  dans le revêtement ; les orientations  $\text{Or}_{P^l; \tilde{\xi}_t}$  des variétés  $W^u(P^l; \tilde{\xi}_t)$  que l'on s'était fixées dans la section 2.1.4 induisent une orientation de  $\mathcal{W}^u(P^l)$  comme suit.

Soit  $(t, x) \in \mathcal{W}^u(P^l)$  ; nous avons l'isomorphisme  $T_{(t,x)}[0, 1] \times \widetilde{M} \simeq T_t[0, 1] \oplus T_x \widetilde{M}$ . L'espace tangent  $T_{(t,x)}\mathcal{W}^u(P^l)$  s'identifie avec  $\langle v' \rangle_{\mathbb{R}} \oplus T_x W^u(P^l; \tilde{\xi}_t)$ , où  $v'$  désigne le vecteur vitesse,

orthogonal à  $T_x W^u(P^l; \tilde{\xi}_t)$  dans  $T_{(t,x)} \mathcal{W}^u(P^l)$ . On remarque que la projection de  $v'$  à  $T_t[0, 1]$  est un certain  $r' \frac{\partial}{\partial t}$  avec  $r' > 0$ . Ainsi, si  $\{v_1, \dots, v_i\} \subseteq T_x W^u(P^l; \tilde{\xi}_t)$  désigne une base ordonnée dont la classe d'orientation est  $\text{Or}_{P^l; \tilde{\xi}_t}$ , on prend la classe d'orientation de la base  $\{\frac{\partial}{\partial t}, v_1, \dots, v_i\}$  comme orientation pour  $\mathcal{W}^u(P^l)$ , que l'on note par  $\text{Or}_{P^l}^{\mathcal{W}}$ .

L'orientation de  $\mathcal{W}^u(P^l)$  induit une co-orientation pour  $\mathcal{W}^s(P^l)$  comme suit. La variété  $\mathcal{W}^s(P^l)$  est de codimension  $i$  dans  $[0, 1] \times \widetilde{M}$  et elle intersecte  $\mathcal{W}^u(P^l)$  le long de  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \{P^l\}$ ; leurs espaces tangents en un point commun  $(t, P^l)$  s'intersectent le long de  $\langle \frac{\partial}{\partial t} \rangle_{\mathbb{R}} \simeq T_t[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ . On en déduit que  $\langle v_1, \dots, v_i \rangle_{\mathbb{R}} \simeq T_{P^l} W^u(P^l; \tilde{\xi}_t)$  est un supplémentaire de  $T_{(t, P^l)} \mathcal{W}^s(P^l)$ ; la classe d'orientation  $[\{v_1, \dots, v_i\}]$  co-oriente  $\mathcal{W}^s(P^l)$ . On note cette co-orientation par  $\text{Coor}_{P^l}^{\mathcal{W}}$ . La même étude marche pour  $gP^k$ , on déduit une orientation pour  $\mathcal{W}^u(gR)$  et une co-orientation pour  $\mathcal{W}^s(gR)$  comme précédemment.

Un point commun à  $\mathcal{W}^u(P^l)$  et à  $\mathcal{W}^s(gP^k)$  est un  $(t_0, x)$  où  $x \in \tilde{\ell}$ . Par transversalité, l'intersection  $\{t_0\} \times \tilde{\ell}$  est co-orientée dans  $\mathcal{W}^u(P^l)$  par  $\text{Coor}_{gP^k}^{\mathcal{W}} = [\{v_1, \dots, v_i\}]$ . Mais  $\tilde{\xi}_{t_0}(x)$  oriente l'espace tangent à la liaison  $\{t_0\} \times \tilde{\ell}$  en  $(t_0, x)$ . La collection  $\{\tilde{\xi}_{t_0}(x), v_1, \dots, v_i\}$  forme ainsi une base de  $T_{(t_0, x)} \mathcal{W}^u(P^l)$  dont la classe d'orientation coïncide soit avec  $\text{Or}_{P^l}^{\mathcal{W}}$  soit avec son opposée. La liaison  $\ell$  est munie du signe  $\epsilon(\ell) = +1$  dans le premier cas et  $\epsilon(\ell) = -1$  dans le deuxième.  $\square$

**Proposition 2.2.33.** *Soit  $L > 0$ . La propriété d'être  $L$ -transverse pour un équipement  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0, 1]}$  d'un chemin générique de 1-formes  $(\alpha_t)_{t \in [0, 1]}$  est générique.*

*Démonstration.* Grâce au lemme 2.2.28, on sait que l'espace  $\widehat{\Omega}^u$  comme dans la définition 2.1.43 bénéficie, pour tout  $L \in \mathbb{R}$ , d'une stratification induite par le produit de stratifications de  $\Omega^u$  et de  $G$ . Notamment, les strates de codimension 0 et 1 sont respectivement

$$\left(\widehat{\Omega}_L^u\right)_0 = \Omega_0^u \times G_L^0 \quad \text{et} \quad \left(\widehat{\Omega}_L^u\right)_1 = (\Omega_1^u \times G_L^0) \cup (\Omega_0^u \times G_L^1)$$

La propriété d'une famille  $(\alpha_t, \xi_t, B_t)_{t \in [0, 1]}$  d'être transverse à la stratification associée à  $L$  est générique. On déduit ainsi la généricité des deux conditions de 2.2.31. On remarque que si  $s$  désigne un temps de traversée de la strate  $\left(\widehat{\Omega}_L^u\right)_{\leq 1}$ , ceci est dû soit au fait que  $\alpha_s$  est de naissance/élimination soit au fait que  $\xi_s$  a une liaison  $\bar{L}$ -élémentaire. Dans le deuxième cas, on a  $\alpha_s \in \Omega_0^u$  et comme  $\xi_s$  est adapté à  $\alpha_s$ , qui est de Morse,  $\xi_s$  est hyperbolique.  $\square$

## 2.2.6 Opérations élémentaires comme chemins

Supposons que l'on se donne une 1-forme fermée  $\alpha_0$  de Morse, munie d'un pseudo-gradient adapté  $\xi_0$  Morse-Smale. La différentielle de ce complexe lit l'intersection algébrique des variétés instables des zéros d'indice  $i + 1$  avec les variétés stables des zéros d'indice  $i$ . La proposition 2.1.42 nous empêche de prendre les pseudo-gradients Morse-Smale pour  $\alpha_0$  comme strate de codimension 0 de l'espace de pseudo-gradients pour  $\alpha_0$ . Ainsi, un chemin « générique » de pseudo-gradients adaptés à  $\alpha_0$  peut avoir a priori un ensemble infini d'instantan où  $\xi_{t_0}$  n'est pas Morse-Smale et la différentielle entre les modules de Morse-Novikov n'est pas définie en  $t_0$ . On

ne peut pas contrôler en général l'intersection « totale » entre les variétés invariantes. Ceci est en particulier dû au fait que les ensembles  $(\alpha/\omega)$ -lim des trajectoires des champs pseudo-gradients pour la forme sont en général non-isolés.

Nous avons ainsi été conduits à considérer des pseudo-gradients  $L$ -transverses, qui ne tiennent compte que d'une troncature des variétés invariantes, ce qui permet de garder un contrôle sur l'intersection des leurs troncatures à une certaine  $\alpha$ -longueur, et ce pour une  $\alpha$ -longueur si grande que l'on veut grâce à la proposition 2.2.33.

Dans cette section, on décrit deux types de chemins à un paramètre issus d'un couple formé par une 1-forme de Morse  $\alpha_0$  équipée avec un pseudo-gradient  $L$ -transverse  $(\xi_0, B_0)$ . Le premier (lemme de descente d'une valeur critique 2.2.34) ne fait varier que la 1-forme, sans sortir de l'espace des 1-formes de Morse, tandis que le deuxième (lemme de glissement 2.2.39) ne concerne que le champ  $L$ -transverse. Ils laissent ainsi invariant le nombre des zéros le long du chemin. Ils sont génériques en tant que familles transverses à la stratification de  $\widehat{\Omega}^u$  dont on parle dans 2.2.33.

### Descente et montée des valeurs critiques

Le lemme de cette section rend précise l'idée suivante : si aucune liaison de  $\alpha$ -longueur inférieur à  $L$  ne part de  $p \in Z(\alpha)$ , on peut « faire descendre » ce zéro de n'importe quelle valeur inférieure à  $L$ .

**Lemme 2.2.34** (Lemme de descente). *Soit  $\alpha_0$  une 1-forme de Morse munie d'un équipement  $L$ -transverse  $(\xi, B)$  et d'une primitive  $h_0$ . Soit  $P \in B$  un relevé. Soit  $D \subseteq W^u(P)$  un disque fermé plongé dans  $\widetilde{M}$  de dimension égale à celle de  $W^u(P)$  et tel que le bord  $\partial D$  est inclus dans un niveau de  $h_0$ .*

*Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit<sup>8</sup>, il existe un voisinage  $V$  de  $D$  arbitrairement petit et une famille à un paramètre de 1-formes de Morse dans  $\Omega^u$  commençant en  $\alpha_0$ , notée par  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  et munie de primitives  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  telles que :*

1.  $h_1(P) = h_0(\partial D) + \varepsilon$ ,
2. pour tout  $t \in [0, 1]$  le couple  $(\xi, B)$  est un équipement  $L$ -transverse de  $\alpha_t$ ,
3.  $\alpha_t|_{M \setminus \pi(V)} = \alpha_0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

*Démonstration.* On utilise une version  $\pi_1 M$ -équivariante pour la primitive  $h_0$  de la preuve de [Lau1, Lemma 1.4] pour la descente de valeurs critiques pour les fonctions réelles. On ne traite pas le cas facile où  $k := \text{ind}(P) = 0$ . Notons  $c := h_0(P)$ ,  $d := h_0(\partial D)$ . Soit  $\delta > 0$  assez petit pour que  $W^s(P)$  soit un disque  $D'$  fermé et plongé dans  $\widetilde{M}$  tel que  $\partial D' \subseteq h_0^{-1}(c + \delta)$ . Soit  $U$  un voisinage tubulaire de  $\partial D$  dans le niveau  $h_0^{-1}(d)$  assez petit pour que  $\pi|_U$  reste injective. Les trajectoires qui passent par  $U$ , soit sont dans  $D$ , soit ont traversé le niveau  $h_0^{-1}(c + \delta)$ . Notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble réunion de  $D, D'$  et toute trajectoire qui part de  $h_0^{-1}(c + \delta)$  et arrive dans  $U$ . Quitte à choisir  $\delta$  plus petit, on peut supposer que  $\pi|_{\mathcal{M}}$  reste injective. On appelle modèle de Morse de  $P$  adapté à  $\xi$  un tel  $\mathcal{M}$ . Le bord de  $\mathcal{M}$  est à coins et décompose en trois parties :

- le bord supérieur  $\mathcal{M}^+ := \mathcal{M} \cap h_0^{-1}(c + \delta)$ ,

---

8. En l'occurrence  $\varepsilon \in ]0, c - d[$  avec les notations de la preuve.

- le bord inférieur  $\mathcal{M}^- := \mathcal{M} \cap h_0^{-1}(d)$ ,
- le bord latéral  $\partial_{\text{lat}}\mathcal{M} := \mathcal{M} \cap \left( \bigcup_{t \in ]-\infty, 0]} \varphi_t(\partial U) \right)$ , où  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  désigne le relevé du flot induit par  $\xi$ .

Les deux coins sont  $\mathcal{M}^+ \cap \partial_{\text{lat}}\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^- \cap \partial_{\text{lat}}\mathcal{M} = \partial U$ . Ils sont difféomorphes via le flot et on remarque que  $\partial U$  est difféomorphe à un produit de sphères  $\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k}$ , où  $k$  est l'indice de  $P$ . Prenons un collier  $N$  de  $\partial_{\text{lat}}\mathcal{M}$  dans  $\mathcal{M}$ . On peut trouver un difféomorphisme

$$\psi : \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k} \times [0, 1]^2 \rightarrow N$$

tel que pour tout  $t \in [0, 1]$  :

- $\psi(\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k} \times [0, 1] \times \{t\})$  est contenu dans un niveau de  $h_0$ ,
- $\psi(\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k} \times \{t\} \times [0, 1])$  est tangent aux orbites de  $\tilde{\xi}$ ,
- l'image  $\psi(\mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k} \times \{0\} \times [0, 1])$  coïncide avec  $\partial_{\text{lat}}\mathcal{M}$ .

Notons  $p : \mathbb{S}^{k-1} \times \mathbb{S}^{n-k} \times [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]^2$  la projection canonique, et  $\mathcal{H}, \mathcal{V}$  les feuilletages horizontal, vertical du carré  $[0, 1]^2$  respectivement. Soit  $\varepsilon' > 0$  si petit que l'on veut. Soit  $\mathcal{D}$  l'espace des difféomorphismes  $\phi \in \text{Diff}([0, 1]^2)$  qui vérifient :

- le feuilletage induit  $\phi_*(\mathcal{H})$  est transverse au feuilletage  $\mathcal{V}$
- la restriction de  $\phi$  à  $[0, 1]^2 \setminus \text{int}([\varepsilon', 1 - \varepsilon']^2)$  est l'identité.

Il est clair que nous pouvons trouver un difféomorphisme  $\phi_1$  isotope à l'identité dans  $\mathcal{D}$  tel que le feuilletage horizontal induit  $(\phi_1)_*(\mathcal{H})$  est comme dans la figure 2.4.

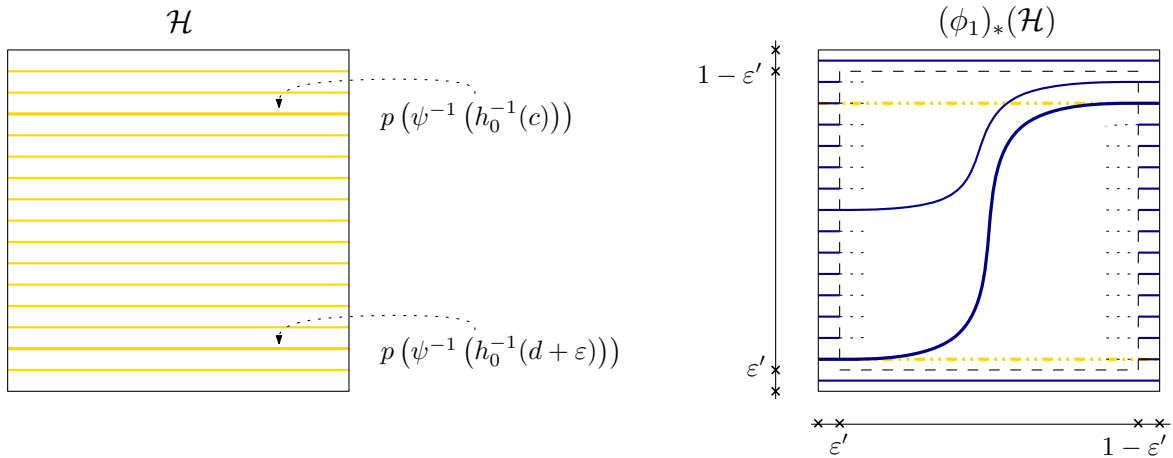


FIGURE 2.4 – Feuilletage horizontal  $\mathcal{H}$  et son induit par  $\phi_1$ .

On prend  $(\phi_t)_{t \in [0, 1]}$  un chemin de difféomorphismes reliant l'identité à  $\phi_1$  dans  $\mathcal{D}$ . Cette isotopie induit une isotopie de  $N$  via  $\psi$ , qui s'étend par l'identité dans  $\mathcal{M} \setminus N$  et que l'on note par  $(\Phi_t)_{t \in [0, 1]}$ . Par le choix de  $\mathcal{M}$ , l'isotopie  $(\Phi_t)_{t \in [0, 1]}$  s'étend par  $\pi_1 M$ -équivariance sur  $\pi_1 M \cdot \mathcal{M}$ . Comme  $\Phi_t$  est l'identité sur un collier de  $\partial \mathcal{M}$  dans  $\mathcal{M}$ , et ce pour tout  $t \in [0, 1]$ , on trouve un chemin de 1-formes  $(\alpha_t)_{t \in [0, 1]}$  associé à  $(\Phi_t)_{t \in [0, 1]}$ . Les primitives  $(h_t)_{t \in [0, 1]}$  associées sont égales à  $h_0$  en dehors de  $\pi_1 M \cdot \mathcal{M}$ . Si  $\mathcal{F}$  désigne le niveau de  $h_1$  contenant  $P$ , nous avons

$$h_1(P) = h_1(\mathcal{F}) = h_1(\partial(\mathcal{F} \cap \mathcal{M})) = h_0(\partial(\mathcal{F} \cap \mathcal{M})) = d + \varepsilon$$

où la dernière égalité provient de la construction de  $\Phi_1$ . □

La prémisse du lemme de descente 2.2.34 sur la variété instable  $W^u(P)$  se reformule avec la terminologie de la section 3.1.3 en disant que  $p$  est  $L^-$ -indépendant ; si  $p$  est  $L^-$ -indépendant, il existe une longueur de troncature  $H$  qui est fonction des choix des relevés et de  $L$ , telle que la troncature  $W_H^u(p)$  est un disque fermé plongé  $D \hookrightarrow M$  de dimension  $\text{ind}(p)$  (voir la remarque 3.1.15).

**Remarque 2.2.35.** *Nous avons un lemme analogue pour la montée des valeurs critiques quand  $p$  est supposé  $L^+$ -indépendant.*

### Glissements élémentaires

Dans la proposition suivante, on explique la relation des matrices de  $L$ -incidence des extrémités d'un glissement  $L$ -élémentaire quelconque : le passage de la matrice de  $L$ -incidence initiale à la finale se fait par le moyen d'une matrice élémentaire ou auto-élémentaire dans le sens de 1.2.1.

**Proposition 2.2.36.** *Soit  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  un glissement  $L$ -élémentaire pour un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  constitué de 1-formes de Morse. Soit  $t_0 \in ]0, 1[$  son temps de glissement. Soit  $\ell$  l'unique liaison d'enroulement  $g$  vérifiant :*

- $\ell$  va de  $p^l$  vers  $p^k$ , où  $p^l, p^k$  sont des zéros de  $\alpha_{t_0}$  de même indice  $i$  vérifiant  $1 \leq i \leq n$ ,
- l'enroulement de  $\ell$  vérifie  $u(g) \geq -L$ .

*Soit  $\epsilon$  le signe associé à cette liaison comme dans 2.2.32. Si  $A_i^{\xi_t}$  désigne la matrice de  $L$ -incidence de  $\partial_i^{\xi_t}$  par rapport aux bases  $B_t$ , on a que  $A_i^{\xi_t}$  est localement constante en  $[0, 1] \setminus \{t_0\}$  et*

1. si  $k \neq l$ , alors

$$\begin{cases} A_i^{\xi_1} = \text{tr}_L(E_{lk}^{\epsilon g} A_i^{\xi_0}) \\ A_{i+1}^{\xi_1} = \text{tr}_L(A_{i+1}^{\xi_0} (E_{lk}^{\epsilon g})^{-1}) = \text{tr}_L(A_{i+1}^{\xi_0} E_{lk}^{-\epsilon g}) \end{cases}$$

*où  $E_{lk}^{\pm \epsilon g}$  désignent les matrices élémentaires au sens du 1 de la définition 1.2.1 ;*

2. si  $k = l$ , on pose  $\lambda_{\pm \epsilon g} := \sum_{r=1}^{\infty} (\pm \epsilon g)^r \in \Lambda_{-u}$ . On a soit

$$\begin{cases} A_i^{\xi_1} = \text{tr}_L(E_{kk}^{\epsilon g} A_i^{\xi_0}) \\ A_{i+1}^{\xi_1} = \text{tr}_L(A_{i+1}^{\xi_0} (E_{kk}^{\epsilon g})^{-1}) = \text{tr}_L(A_{i+1}^{\xi_0} E_{kk}^{\lambda - \epsilon g}) \end{cases}$$

*soit*

$$\begin{cases} A_i^{\xi_1} = \text{tr}_L(E_{kk}^{\lambda \epsilon g} A_i^{\xi_0}) \\ A_{i+1}^{\xi_1} = \text{tr}_L(A_{i+1}^{\xi_0} (E_{kk}^{\lambda \epsilon g})^{-1}) = \text{tr}_L(A_{i+1}^{\xi_0} E_{kk}^{-\epsilon g}) \end{cases}$$

*où  $E_{kk}^{\pm \epsilon g}$  et  $E_{kk}^{\lambda \pm \epsilon g}$  désignent les matrices auto-élémentaires au sens du 2 de la définition 1.2.1.*

*Démonstration.* Il est clair que les matrices de  $L$ -incidence ne varient pas en  $[0, 1] \setminus \{t_0\}$  : pendant que  $\xi_t$  est dans  $G_L^0$ , la façon dont les variétés concernées par la  $L$ -transversalité s'intersectent est la même ; il ne peut pas y avoir de perte ou ajout de liaisons sans perte de  $L$ -transversalité à

un instant donné. Expliquons la discontinuité des matrices  $A_i^{\xi_t}$  qui a lieu en  $t = t_0$  : seulement les zéros d'indices  $i$  et  $i - 1$  sont concernés.

Il existe  $J$  un petit intervalle autour de  $t_0$  qui ne contient pas de croisement des valeurs critiques associés aux relevés  $B_t$  ; de plus  $\alpha_t$  est tout le temps de Morse. On peut ainsi supposer que le chemin de 1-formes est constant pour  $t \in J$ , ainsi que son chemin des primitives et des relevés qui sont respectivement notés  $h$  et  $B_{t_0}$ . Comme le changement de  $L$ -incidence ne peut avoir lieu qu'autour de  $t_0$ , on se restreint à l'étude du glissement  $L$ -élémentaire pour le chemin  $(\alpha_t)_{t \in J}$  de primitives et relevés constants. Pour simplifier les notations, on pose  $J = [0, 1]$ .

Fixons une fois pour toutes un  $\varepsilon' > 0$  suffisamment petit et des modèles de Morse<sup>9</sup>  $\mathcal{M}_t(R)$  des points  $R$  dans  $B_0$  adaptés au pseudo-gradient  $\xi_t$  tels que les bords supérieur/inférieur  $\mathcal{M}_t^\pm(R)$  vérifient  $h(\mathcal{M}_t^\pm(R)) = h(R) \pm \varepsilon'$  respectivement, pour tout  $R \in B_0$  et tout  $t \in [0, 1]$ . La trace des variétés invariantes de  $W^{s/u}(R; \xi_t)$  dans les bords  $\mathcal{M}_t^\pm(R)$  sont des sphères  $\Sigma_t^\pm(R)$  pour tout  $R \in B_0$ . Ces modèles sont si proches des  $R \in B_0$  que l'on veut : ils ne modifient leurs positions que très peu le long de l'intervalle  $[0, 1]$ . On s'autorise à les considérer comme des objets fixes. Notons respectivement, pour tout  $R \in B_0$ , les niveaux

$$N(R) := h^{-1}(h(R)) \quad \text{et} \quad N^\pm(R) := h^{-1}(h(R) \pm \varepsilon').$$

On remarque que pour tout  $R \in B_0, g \in \pi_1 M$  et  $r \in \mathbb{N}$ , on a  $N^\pm(g^r R) = g^r N^\pm(R)$ .

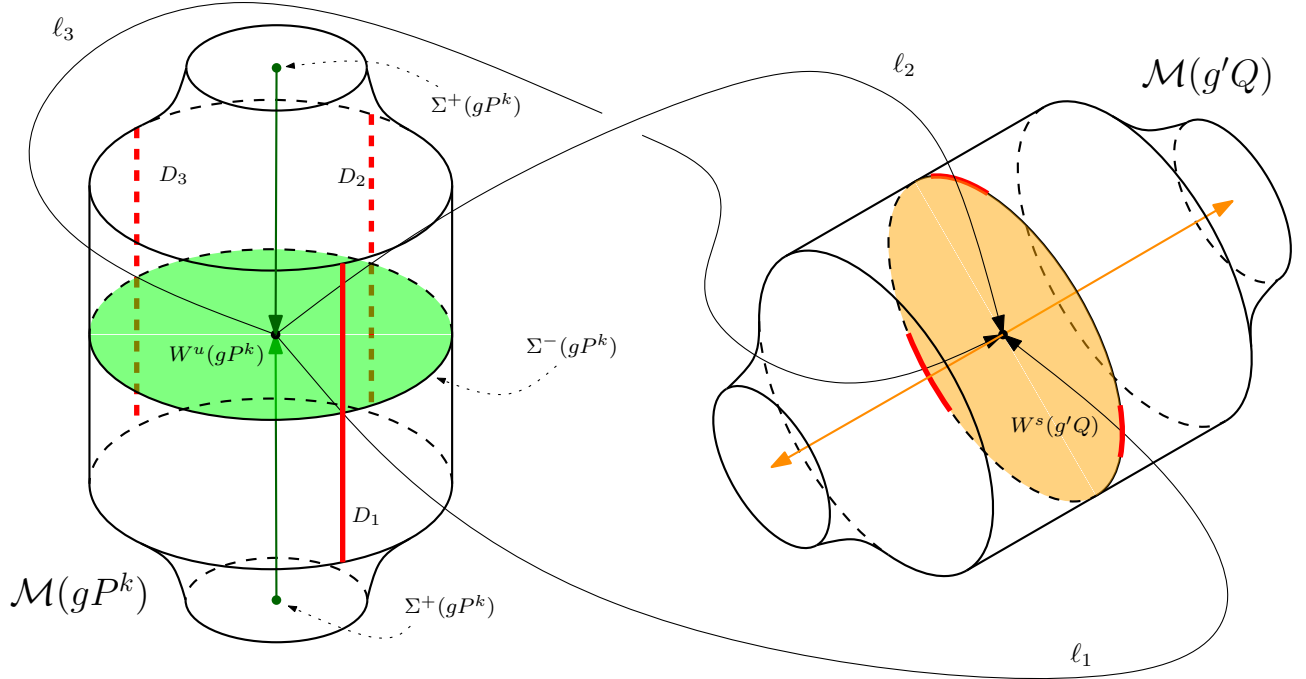
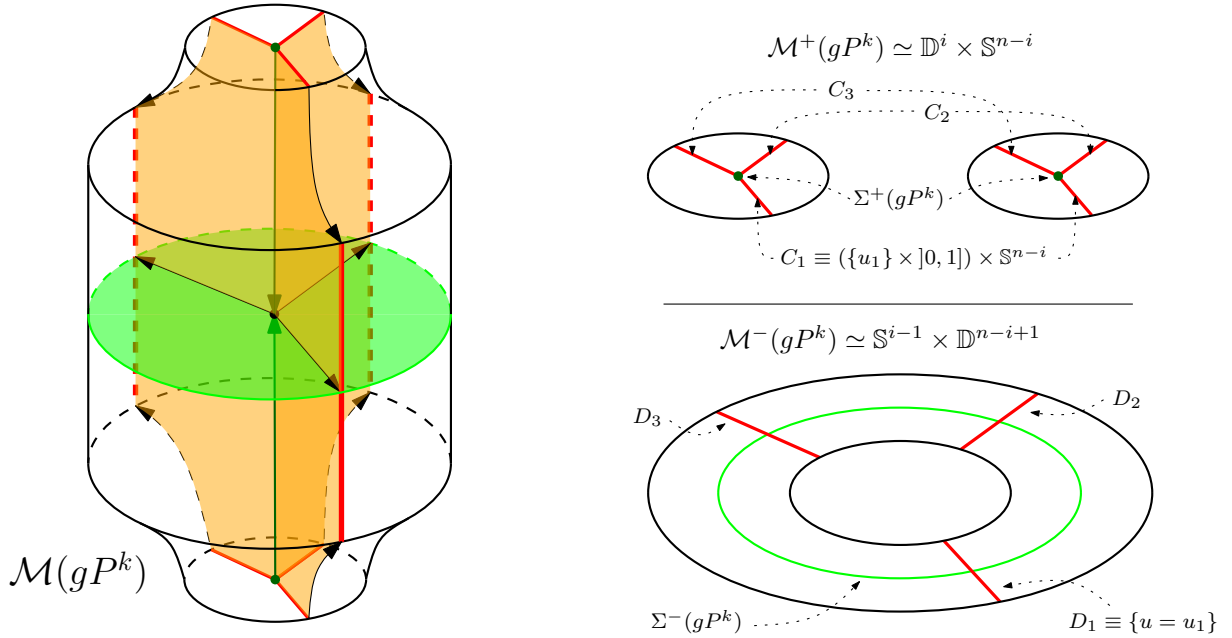
On explique la situation des variétés invariantes proches de  $gP^k$  dont l'intersection va changer une fois la valeur  $t = t_0$  sera franchie. Supposons que  $\xi_0$  présente des liaisons  $\ell_j$  de  $gP^k$  vers  $g'Q$ , où  $Q \in B_{i-1}$  et  $g' \in \pi_1 M$  est tel que  $u(g^{-1}g') > -L$ . Par définition, l'enroulement de ces liaisons est  $g^{-1}g'$  et participe ainsi à la somme finie  $\langle P^k, Q \rangle_L^{\xi_0}$  de la matrice de  $L$ -incidence  $A_i^{\xi_0}$ . Comme dans la section 1.1.1, on note par  $n_0 := n_{g^{-1}g'}(\langle P^k, Q \rangle_L^{\xi_0})$  le coefficient dans  $\mathbb{Z}$  qui affecte  $g^{-1}g'$  dans  $\langle P^k, Q \rangle_L^{\xi_0} \in \mathbb{Z}[\pi_1 M]$ . Munissons le bord inférieur  $\mathcal{M}^-(gP^k)$  de coordonnées  $(u, y) \in \mathbb{S}^{i-1} \times \mathbb{D}^{n-i+1} \simeq \mathcal{M}^-(gP^k) \subseteq N^-(gP^k)$ . La trace de  $W^s(g'Q)$  dans  $\mathcal{M}^-(gP^k)$  est une réunion de  $m_0$  disques  $D_j$  de dimension  $n-i+1$ , qui intersectent la sphère  $\Sigma^-(gP^k)$  de dimension  $i-1$  chacun en un point de coordonnée sphérique  $u = u_j$ . On suppose pour simplifier que  $D_j$  est le méridien d'équation  $\{u = u_j\}$  dans  $\mathcal{M}^-(gP^k)$  avec les coordonnées choisies. On rappelle que chacune des liaisons  $\ell_j$  de  $gP^k$  à  $g'Q$  qui passe par  $\{(u_j, 0)\} = \Sigma^-(gP^k) \cap D_j$  est munie d'un signe  $\eta(\ell_j)$  et que  $n_0 = \sum_{j=1}^{m_0} \eta(\ell_j)$  par définition de  $L$ -incidence. La situation est comme dans la figure 2.5.

Le bord supérieur  $\mathcal{M}^+(gP^k)$  du modèle est muni des coordonnées  $(x, v) \in \mathbb{D}^i \times \mathbb{S}^{n-i}$ . Quand on regarde  $(\mathbb{D}^i)^* \simeq \mathbb{S}^{i-1} \times ]0, 1]$  on exprime  $x = (u, r)$  comme angle/rayon. La sphère stable de  $gP^k$  correspond à  $\Sigma^+(gP^k) \simeq \{0\} \times \mathbb{S}^{n-i}$ . Via le flot, on déduit que la trace de  $W^s(g'Q)$  dans  $\mathcal{M}^+(gP^k)$ , qui correspond<sup>10</sup> aux couronnes ouvertes  $C_j := (\{u_j\} \times ]0, 1]) \times \mathbb{S}^{n-i}, j = 1, \dots, m_0$ . Voir la figure 2.6.

Nous allons analyser l'intersection de la variété  $W^u(P^l)$  avec  $W^s(g'Q)$  dans le modèle  $\mathcal{M}(gP^k)$  ; on va observer une modification des liaisons qui partent de  $P^l$ . On distingue les cas  $k \neq l$  et  $k = l$ .

9. Les modèles sont pris de façon analogue au modèle de Morse  $\mathcal{M}$  de la preuve du lemme 2.2.34.

10. Ceci vaut pour toutes les traces des  $W^s(g''Q')$  où  $Q'$  est un relevé d'indice  $i-1$  et  $g'' \in \pi_1 M$  tel que  $u(g'') > -L$ .

FIGURE 2.5 – Modèles autour de  $gP^k$  et  $g'Q$  et les liaisons allant de l'un à l'autre.FIGURE 2.6 – Trace de  $W^s(g'Q)$  dans le modèle  $\mathcal{M}(gP^k)$  et ses bords supérieur et inférieur.

Premier cas :  $k \neq l$ . Il s'agit du cas bien connu. On retrouve un glissement d'une variété instable sur une autre, toutes les deux à bord dans un niveau inférieur au point critique le plus bas, en l'occurrence  $gP^k$  ; on peut comparer au *théorème de la base* [Mi2, Th. 7.6]. Nous



l'expliquons dans le but d'introduire le cadre pour bien comprendre le nouveau cas  $k = l$ .

L'étude se concentre dans le modèle  $\mathcal{M}(gP^k)$ . Regardons notre glissement  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$ . Comme on trouve une liaison  $L$ -élémentaire de  $P^l$  vers  $gP^k$  en  $t = t_0$ , la variété instable de  $W^u(P^l; \tilde{\xi}_t)$  a intersection non-vide avec  $\mathcal{M}^+(gP^k)$  pour des temps proches de  $t_0$  par continuité. Appelons  $b = (0, v_b) \in \{0\} \times \mathbb{S}^{n-i} \simeq \Sigma^+(gP^k)$  le point de la liaison  $\tilde{\ell}$  entre  $P^l$  et  $gP^k$  dans  $\Sigma^+(gP^k)$ . Quitte à avoir pris les modèles d'épaisseur suffisamment fine, on a les faits suivants :

- l'ensemble des temps où  $W^u(P^l; \tilde{\xi}_t) \cap \mathcal{M}^+(gP^k) \neq \emptyset$  est un intervalle, que l'on suppose centré dans le temps de glissement, disons  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ ,
- la réunion pour  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  des intersections mentionnées forment un disque fermé  $\Delta$  de dimension  $i$ , plongé dans le bord supérieur  $\mathcal{M}^+(gP^k)$ ; nous l'appelons *disque de balayage*. Ce disque  $\Delta$  ne coupe  $\Sigma^+(gP^k) \simeq \{0\} \times \mathbb{S}^{n-i}$  qu'en  $b = (0, v_b)$ ; l'intersection est transverse dans le niveau et on peut supposer pour simplifier que  $\Delta$  coïncide avec le disque méridien passant par  $v_b$ , c'est-à-dire  $\Delta = \mathbb{D}^i \times \{v_b\}$ ,

On peut voir  $\Delta$  comme un fibré  $p : \Delta \rightarrow [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  avec deux fibres pincées tel que :

- pour tout  $t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ , la fibre  $p^{-1}(t) = W^u(P^l; \tilde{\xi}_t) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$  est donnée par un  $(i - 1)$ -disque que l'on note  $D_t^{i-1}$ ,
- l'une des fibres pincée est donnée par le point  $p^{-1}(t_0 - \varepsilon) \in \partial\Delta$ ,
- l'autre fibre pincée est donnée par le point  $p^{-1}(t_0 + \varepsilon) \in \partial\Delta$ .

Si  $\gamma : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \Delta$  désigne une section de  $p$  telle que  $\gamma(t_0) = b$ , quitte à rétrécir encore l'épaisseur du modèle on peut supposer que les disques  $D_t^{i-1}$  sont  $\mathcal{C}^\infty$ -proche des leurs espaces tangents  $T_{\gamma(t)} D_t^{i-1}$  pour tout  $t \in ]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ . On peut ainsi voir les  $D_t^{i-1}$  comme les hyperplans de  $\Delta$  qui le balayent dans la direction portée par la section  $\gamma$ . Les couronnes  $C_j = (\{u_j\} \times ]0, 1]) \times \mathbb{S}^{n-i}$  ne coupent  $W^u(P^l; \tilde{\xi}_t)$  qu'en  $\Delta$ ; l'intersection transverse de  $\Delta \cap W^s(g'Q)$  est donnée par la réunion des rayons  $I_j := \{u_j\} \times ]0, 1] \times \{v_b\}$ ,  $j = 1, \dots, m_0$ , qui se compactifient en un cône sur  $m_0$  points en leur ajoutant le centre  $\{0\} \times \{v_b\} = b$ . On voit ce disque dans la figure 2.7.

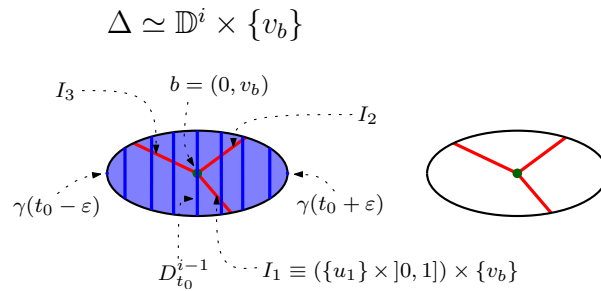


FIGURE 2.7 – Disque de balayage  $\Delta$  dans le bord supérieur  $\mathcal{M}^+(gP^k) \simeq \mathbb{D}^i \times \mathbb{S}^{n-i}$ .

On appelle  $\Delta^- := p^{-1}([t_0 - \varepsilon, t_0])$  *demi-disque d'entrée* et  $\Delta^+ := p^{-1}(]t_0, t_0 + \varepsilon])$  *demi-disque de sortie*, ainsi que *hémisphère d'entrée/sortie* les bords respectifs  $\partial(\Delta^\pm) \subseteq \partial(\mathcal{M}^+(gP^k))$ . Dans  $\Delta$ , chaque  $D_t^{i-1}$  est un hyperplan; seul  $D_{t_0}^{i-1}$  passe par le centre  $b$ . Génériquement, un hyperplan passant par le centre d'un disque de dimension  $i$ , évite une quantité finie de rayons donnés si  $i \geq 2$ ; si  $i = 1$ , le disque méridien  $\Delta$  contient soit aucun, un ou deux rayons, qui sont automatiquement égaux aux intervalles semi-ouverts  $\Delta^\pm$ .



Ainsi, les rayons  $I_j$  sont génériquement dans un des deux demi-disques  $\Delta^\pm$ . Il est clair que si on prend un temps  $t$  inférieur et assez proche de  $t_0$ , le disque  $p^{-1}(t)$  coupe en un seul point  $x_{j,t} := (u_j, r_t, v_b)$  chacun des rayons  $I_j$  qui sont contenus dans  $\Delta^-$ . Ce point appartient à une liaison  $\ell'_j$  présente avant le temps de glissement, qui est dans  $W^u(P^l; \tilde{\xi}_t) \cap W^s(g'Q; \tilde{\xi}_t)$ . Si le temps  $t$  est supérieur et assez proche de  $t_0$ , le disque  $p^{-1}(t)$  coupe chaque rayon  $I_j$  contenu dans  $\Delta^+$  en un point, qui correspond à une liaison  $\ell'_j$  présente après le temps de glissement, de  $P^l$  vers  $g'Q$ . Celles qui étaient présentes avant le glissement ne le sont plus après et vice-versa. Elles possèdent toutes le même enroulement  $g'$ . Si  $\epsilon$  désigne le signe  $\epsilon(\ell)$  associé à la liaison allant de  $P^l$  vers  $P^k$  comme dans 2.2.32, un calcul avec les orientations permet de voir que les liaisons  $\ell'_j$  associées aux rayons  $I_j$  dans  $\Delta^-$  qui sont présentes avant l'instant de glissement ont pour signe  $-\epsilon\eta(\ell_j)$  et que les liaisons  $\ell'_j$  présentes après l'instant de glissement ont pour signe  $+\epsilon\eta(\ell_j)$ . Voir figure 2.8.

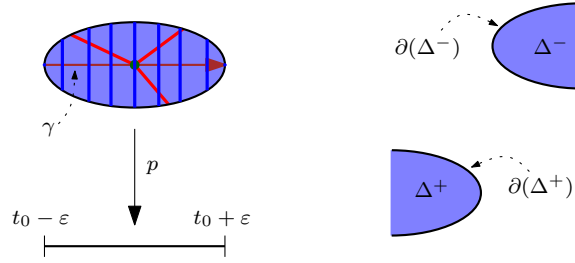


FIGURE 2.8 – Disque de balayagé comme fibré pincé. Demi-disques  $\Delta^\pm$  et hémisphères  $\partial(\Delta^\pm)$  d'entrée/sortie.

Tout ceci explique dans tous les cas l'effet algébrique du glissement sur la variété instable de  $gP^k$  :

- l'enroulement des liaisons  $\ell_j$  de  $gP^k$  vers  $g'Q$  est  $e(\ell_j) = g^{-1}g'$  et l'enroulement des liaisons  $\ell'_j$  de  $P^l$  vers  $g'Q$  est  $e(\ell'_j) = g' = g \cdot e(\ell_j)$ , qui ne vérifie pas a priori l'inégalité  $u(g') > -L$  ; si elle ne la vérifie pas, cette nouvelle liaison n'est pas comptée dans la matrice de  $L$ -incidence de  $\xi_1$ .
- le signe des liaisons  $\ell'_j$  est  $\pm\epsilon\eta(\ell_j)$  si elle apparaît/disparaît après l'accident en  $t = t_0$ .

L'effet algébrique du glissement de  $W^u(P^k)$  sur  $W^u(gP^k)$  est l'ajout du terme  $\epsilon \text{tr}_L(g\langle P^k, Q \rangle_L^{\xi_0})$  à la  $L$ -incidence  $\langle P^l, Q \rangle_L^{\xi_0}$ . Vu que le comportement des variétés invariantes est  $\pi_1 M$ -équivariant,  $W^u(g''P^l)$  glisse sur  $W^u(g''gP^k)$  pour tout  $g'' \in \pi_1 M$  et la question de savoir si ceci peut entraîner que  $W^u(P^l)$  glisse sur une autre variété instable associée à un  $g''gP^k$  se pose. Mais par  $\pi_1 M$ -équivariance, la variété instable qui glisse sur  $W^u(g''gP^k)$  est  $W^u(g''P^l)$  : on trouve des accidents seulement pour  $g'' = 1$ .

La nouvelle  $L$ -incidence dans ce cas se trouve ainsi en réalisant le changement de base suivant, puis en tronquant à la longueur  $L$  :

$$\begin{cases} P^s \mapsto P^s & \text{si } s \neq l \\ P^l \mapsto P^l + \epsilon gP^k \end{cases}$$

Si  $B_{i-1} = \{Q^1, \dots, Q^r\}$  désignent les relevés d'indices  $i-1$ , les matrices de  $L$ -incidence de  $\partial_i^{\xi_0}, \partial_i^{\xi_1}$  vérifient :

$$\begin{aligned}
A_i^{\xi_1} &= A_i^{\xi_0} + \epsilon \operatorname{tr}_L \left( \begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ g \langle P^k, Q^1 \rangle_L^{\xi_0} & \dots & g \langle P^k, Q^r \rangle_L^{\xi_0} \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \} \text{Ligne } l\text{-ème} \\
&= \operatorname{tr}_L(E_{lk}^{\epsilon g} A_i^{\xi_0})
\end{aligned}$$

Deuxième cas :  $k = l$ . Ce cas de figure n'était pas présent dans le contexte des fonctions  $f : W \rightarrow [0, 1]$  à valeurs réelles sur un cobordisme. Pour que la variété instable de  $x^k$ , un point critique de  $f$  glisse sur la variété instable de  $x^k$ , on aurait besoin en particulier de l'inégalité  $f(x^k) > f(x^k)$ , ce qui est impossible. Par contre, les relevés  $P^k, gP^k$  vérifient  $h(P^k) > h(gP^k)$  quand  $u(g) < 0$ . La différence fondamentale dans ce cas, est que la modification de la variété instable de  $P^l = P^k$  est aussi subie par tous les points critiques  $g'P^k, g' \in \pi_1 M$ , en particulier aussi par celle de  $gP^k$ . On utilise les notations que nous avons introduites au premier cas, l'étude que nous y avons faite reste valable.

L'affirmation suivante, qui porte sur  $k, l$  quelconques, va permettre de comprendre une belle dichotomie qui est présente dans le cas  $k = l$  :

**AFFIRMATION :** Soient  $D_t^-(P^l)$  les traces respectives des variétés instables  $W^u(P^l; \tilde{\xi}_t)$  pour  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  dans le niveau  $N^-(gP^k)$ . Alors il existe un chemin continu  $(\delta_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]}$  de  $(i - 1)$ -disques fermés vérifiant :

- pour tout  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0[$ , on a  $\delta_t \subseteq D_t^-(P^l)$ ,
- le disque  $\delta_{t_0}$  est un hémisphère distingué  $H^-$  dit d'entrée, contenu dans la sphère  $\Sigma^-(gP^k) = W^u(gP^k) \cap \mathcal{M}^-(gP^k)$ ,

tel que la somme connexe plongée  $D_{t_0 - \varepsilon}^-(P^l) \#_{(\delta_\bullet)} \Sigma^-(gP^k)$  réalisée par la famille  $(\delta_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]}$  est isotope à  $D_{t_0 + \varepsilon}^-(P^l)$  dans  $N^-(gP^k)$ .

**PREUVE DE L'AFFIRMATION :**

Soient  $N_1, N_2$  deux niveaux de  $h$  tels que  $h(N_1) > h(N_2)$  et notons par  $\mathcal{N}_1(t), \mathcal{N}_2(t)$  les portions respectives de ces niveaux qui sont mises en bijection par les orbites de  $\tilde{\xi}_t$ ; ceci donne des difféomorphismes, dits de flux  $\xi_{N_2}^{N_1}(t) : \mathcal{N}_1(t) \rightarrow \mathcal{N}_2(t)$ . On ne fait pas référence aux temps  $t$  quand on restreint les flux aux modèles  $\mathcal{M}$ . On considère le flux particulier  $\Psi := \xi_{N^-(gP^k)}^{N^+(gP^k)}$ .

Considérons le disque équatorial  $D_{t_0}^{i-1} \subseteq \Delta$ . Seul son centre  $b$  est hors du domaine de définition de  $\Psi$ , vu qu'il est dans  $W^s(gP^k)$  et seulement la couronne ouverte  $D_{t_0}^{i-1} \setminus \{b\} \simeq \mathbb{S}^{i-2} \times ]0, 1]$  descend jusqu'au niveau  $N^-(gP^k)$ . Ainsi, quand  $r \rightarrow 0^+$  les sphères  $\Psi(\mathbb{S}^{i-2} \times \{r\})$  convergent dans la compactification de  $W^u(gP^k) \cap N^-(gP^k)$ , c'est-à-dire dans  $\Sigma^-(gP^k) \simeq \mathbb{S}^{i-1} \times \{0\}$ . On note par  $E$  la sphère limite  $\lim_{r \rightarrow 0^+} (\Psi(\mathbb{S}^{i-2} \times \{r\}))$ , que l'on appelle équateur de  $\Sigma^-(gP^k)$ . Cet équateur divise en deux composantes connexes  $\Sigma^-(gP^k) \setminus E$ . L'hémisphère  $H^-$  de l'énoncé de l'affirmation est l'adhérence de la composante qui est proche des  $(i - 1)$ -disques  $\Psi(D_t^{i-1})$  pour  $t < t_0$  assez proche. L'adhérence de l'autre composante connexe est dite *hémisphère de sortie* et est notée  $H^+$ . Il est clair que nous pouvons trouver le chemin des disques  $(\delta_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]}$  vérifiant

les deux premières propriétés de l'énoncé en choisissant judicieusement une collection de disques  $\delta'_t \subseteq W^u(P^l) \cap N^+(gP^k)$ ,  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]$  et en prenant  $\delta_t := \Psi(\delta'_t)$ .

La somme connexe plongée  $D_{t_0-\varepsilon}^-(P^l) \#_{(\delta_\bullet)} \Sigma^-(gP^k)$  qui a lieu dans le niveau  $N^-(gP^k)$  est réalisée en retirant les disques  $\delta_{t_0-\varepsilon}$  de  $D_{t_0-\varepsilon}^-(P^l)$  et  $H^- = \delta_{t_0}$  de  $\Sigma^-(gP^k)$  et en recollant par le tube  $\mathbb{S}^{i-2} \times [t_0 - \varepsilon, t_0] = \bigcup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0]} \partial \delta_t$ . Il est clair que cette somme connexe plongée et  $D_{t_0+\varepsilon}^-$  sont isotopes grâce à l'étude que nous avons faite sur les variétés instables  $W^u(P^l; \tilde{\xi}_t)$  proche de  $gP^k$  et autour  $t_0$ . L'affirmation est ainsi démontrée.

On remarque que toutes les liaisons de  $P^l$  vers  $g'Q$  qui ont disparu avaient un et un seul point de passage par  $H^-$ , hémisphère qui n'est pas dans la somme connexe vu qu'il a servi de support à cette somme connexe. Cependant, toutes les liaisons qui sont apparues ont un et un seul point de passage par  $H^+$ , hémisphère de  $\Sigma^-(gP^k)$  qui reste dans la somme connexe. La trace de la variété  $W^u(P^l; \tilde{\xi}_t)$  dans  $\mathcal{M}^-(gP^k)$  pour  $t$  variant dans  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  est représentée dans la figure 2.9, où on voit la couronne  $\Delta \setminus \{b\} \simeq (\mathbb{S}^{i-1} \times ]0, 1]) \times \{v_b\}$  descendre sur la couronne  $\mathbb{S}^{i-1} \times (\{v_b\} \times ]0, 1]) \subseteq \mathcal{M}^-(gP^k)$  par le difféomorphisme de flux  $\xi_{N^-(gP^k)}^{N^+(gP^k)}$ .

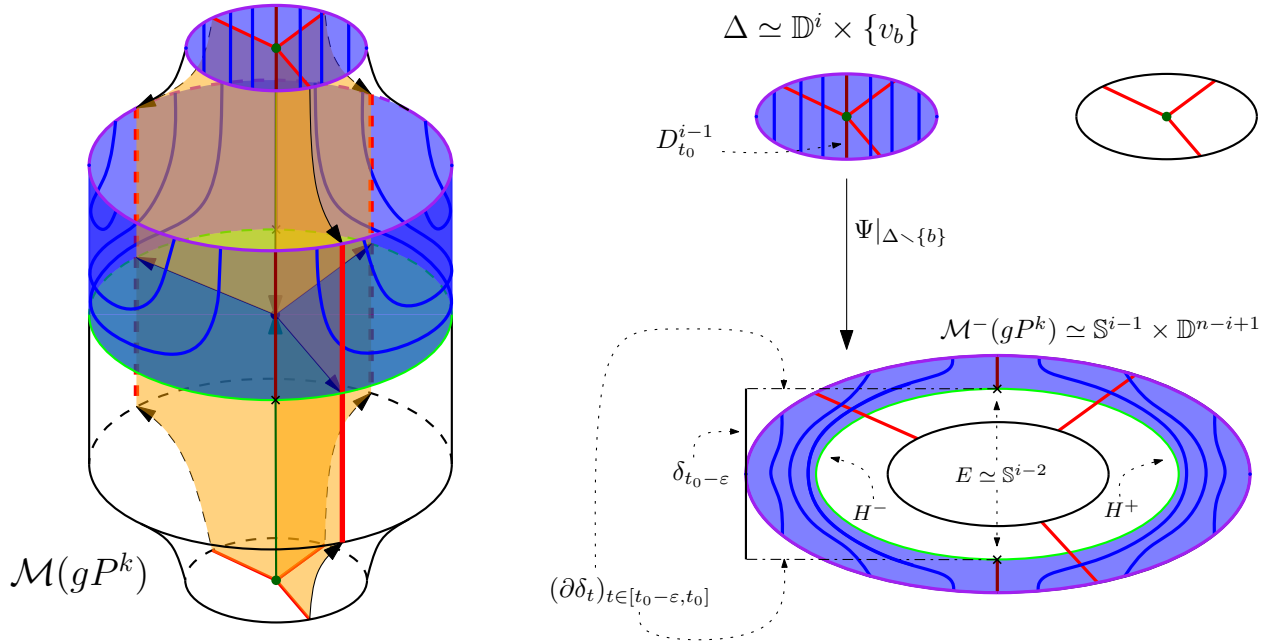


FIGURE 2.9 – Trace de  $(W^u(P^l; \tilde{\xi}_t))_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}$  dans  $\mathcal{M}^-(gP^k)$ . Bords des disques  $\delta_\bullet$  réalisant la somme connexe plongée.

□ FIN DE LA PREUVE DE L’AFFIRMATION

Comme l'étude du premier cas reste valable, les liaisons  $\ell'_j$  allant de  $gP^k$  vers  $g'Q$  induisent une perte ou un gain de liaisons de  $P^k$  vers  $g'Q$  : la  $L$ -incidence de  $\langle P^k, Q \rangle_L$  reçoit en particulier la modification expliquée dans le premier cas. Mais, dû à la  $\pi_1 M$ -équivariance,  $W^u(g''P^k)$  glisse sur  $W^u(g''gP^k)$  pour tout  $g'' \in \pi_1 M$  et en particulier la variété instable de  $gP^k$  glisse sur

$W^u(g^2P^k)$  au temps  $t_0$  ; il en est de même pour  $W^u(g^2P^k)$  qui glisse sur  $W^u(g^3P^k)$  et ainsi de suite pour toutes les variétés instables  $W^u(g^rP^k)$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$ .

Rappelons que  $\tilde{\ell}$  est la liaison de type  $i/i$  qui va de  $P^k$  vers  $gP^k$  en  $t = t_0$  qui est munie du signe  $\epsilon = \epsilon(\ell)$  comme dans 2.2.32 ; une fois la liaison et son signe sont déterminés, montrons que  $W^u(P^k)$  peut glisser sur  $W^u(gP^k)$  essentiellement de deux manières distinctes, chacune ayant un effet algébrique différent sur la  $L$ -incidence  $\langle P^k, Q \rangle_L$ .

Nous avons une liaison  $g\tilde{\ell}$  de  $gP^k$  vers  $g^2P^k$ , qui coupe transversalement  $\mathcal{M}^-(gP^k)$  dans un point  $\chi$  de coordonnées  $\chi = (u_\chi, 0) \in \Sigma^-(gP^k) \simeq \mathbb{S}^{i-1} \times \{0\}$ . Génériquement, le point  $\chi$  n'est pas sur l'équateur  $E$ , et  $\chi$  appartient ainsi soit à l'intérieur de  $H^-$ , soit à celui de  $H^+$  ; c'est là qu'est la dichotomie annoncée. Le point  $\chi$  est appelé *point de dichotomie*.

Grâce à l'affirmation prouvée ci-dessus, la trace de  $W^u(P^k; \xi_1)$  dans le niveau  $N^-(gP^k)$  est isotope à la sous-variété  $S_1 \subseteq N^-(gP^k)$  donnée par la somme connexe plongée que l'on a décrite dans l'affirmation. Cette sous-variété, contient l'hémisphère  $H^+$ . Regardons maintenant la trace de  $S_1$  dans le niveau  $N^-(g^2P^k)$  via les flux  $\xi_{N^-(g^2P^k)}^{N^-(gP^k)}(t)$ . Par  $\pi_1 M$ -équivariance, la trace de la variété instable  $W^u(gP^k; \tilde{\xi}_t)$  varie dans le niveau  $N^+(g^2P^k)$  en balayant le  $i$ -disque  $g\Delta$  ; comme le disque  $g\Delta$  coupe la liaison  $g\tilde{\ell}$ , on trouve un petit disque  $D_\chi \subseteq \Sigma^-(gP^k)$  contenant  $\chi$  tel que  $g\Delta$  est contenu dans le balayage donné par la réunion  $\bigcup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \left( \xi_{N^+(g^2P^k)}^{N^-(gP^k)}(t) \right) (D_\chi)$ . On peut prendre par exemple  $D_\chi = \left( \xi_{N^+(g^2P^k)}^{N^-(gP^k)}(t_0) \right)^{-1} (gD_{t_0}^{i-1})$ . Nous sommes prêts à comprendre la dichotomie :

1.  $\chi \in \text{int}(H^+)$ . Si on pousse  $S_1$  par les flux  $\xi_{N^+(g^2P^k)}^{N^-(gP^k)}(t)$  jusqu'au niveau  $N^+(g^2P^k)$  pour  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  la réunion des images contiendra le disque de balayage  $g\Delta$  car  $D_\chi \subseteq H^+ \subseteq S_1$ . Grâce à l'affirmation sur la somme connexe plongée, la trace de  $W^u(P^k; \tilde{\xi}_{t_0 + \varepsilon})$  dans le niveau  $N^-(g^2P^k)$  est isotope à la somme connexe plongée  $S_2 := \left( \left( \xi_{N^-(g^2P^k)}^{N^-(gP^k)}(t_0 - \varepsilon) \right) (S_1) \right)_{(g\delta_\bullet)}^\# \Sigma^-(g^2P^k)$ . Il s'agit en effet d'une double somme connexe :  $S_1$  en est déjà une. Si on étudie la réunion des images de la somme connexe  $S_2$  poussée par les flux jusqu'au niveau  $N^+(g^3P^k)$ , cette réunion contient le disque de balayage  $g^2\Delta$  et le même cas de figure se présente pour  $S_2$ . En itérant le raisonnement, on obtient une suite  $(S_r)_{r \in \mathbb{N}}$  de sommes connexes plongées itérées, où  $S_r$  est dans le niveau  $N^-(g^rP^k)$  et est donnée par

$$S_r := \left( \left( \xi_{N^-(g^rP^k)}^{N^-(g^{r-1}P^k)}(t_0 - \varepsilon) \right) (S_{r-1}) \right)_{(g^{r-1}\delta_\bullet)}^\# \Sigma^-(g^rP^k)$$

telle que  $S_r$  vérifie les propriétés suivantes :

- la somme connexe  $S_r$  est isotope à la trace de  $W^u(P^k; \tilde{\xi}_{t_0 + \varepsilon})$  dans le niveau où  $S_r$  est contenue,
  - la famille  $\left( \xi_{N^-(g^{r+1}P^k)}^{N^-(g^rP^k)}(t) \right) (S_r)$  pour  $t \in [0, 1]$  balaye  $g^r\Delta$  et coupe donc  $W^s(g^{r+1}P^k)$ ,
- et ce pour tout  $r \in \mathbb{N}^*$ . La figure 2.10 montre la variété instable de  $P^k$  associée à  $\tilde{\xi}_{t_0 - \varepsilon}$  et à  $\tilde{\xi}_{t_0 + \varepsilon}$ , leurs traces dans les niveaux contenant les bords inférieurs des modèles  $\mathcal{M}(P^k)$ ,  $\mathcal{M}(gP^k)$ ,  $\mathcal{M}(g^2P^k)$  ainsi que les sommes connexes plongées  $S_1$  et  $S_2$ .

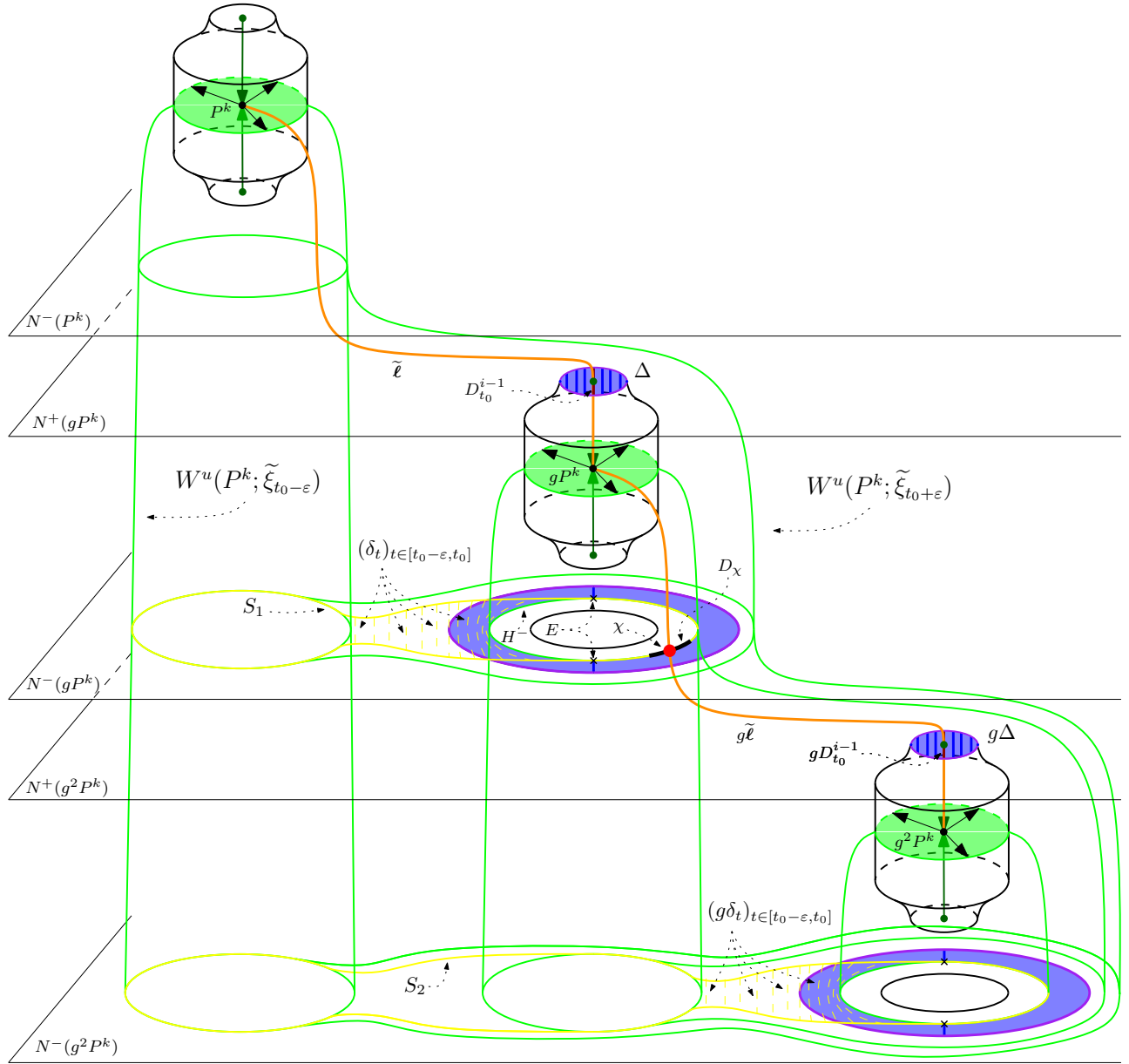


FIGURE 2.10 – Variétés instables  $W^u(P^k; \tilde{\xi}_{t_0-\varepsilon})$  et  $W^u(P^k; \tilde{\xi}_{t_0+\varepsilon})$ , leurs traces dans les niveaux  $N^-(P^k)$ ,  $N^-(gP^k)$ ,  $N^-(g^2P^k)$  et sommes connexes plongées  $S_1$  et  $S_2$ .

2.  $\chi \in \text{int}(H^-)$ . L'image de  $S_1$  par les flux  $\xi_{N^+(g^2P^k)}^{N^-(gP^k)}(t)$  dans le niveau  $N^+(g^2P^k)$  ne balaye pas le disque  $g\Delta$  du fait que le disque  $D_\chi$  est loin de la somme connexe  $S_1$ . Ainsi l'image de  $S_1$  dans le niveau  $N^-(g^2P^k)$  par le flux  $\xi_{N^-(g^2P^k)}^{N^-(gP^k)}(t_0 + \varepsilon)$  n'est plus modifiée par somme connexe et  $S_1$  continue à descendre en traversant les niveaux  $N^-(g^rP^k)$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$  de façon usuelle.

Ceci explique les possibles effets algébriques sur la  $L$ -incidence  $\langle P^k, Q \rangle_L$  selon le cas :

1.  $\chi \in \text{int}(H^-)$ . L'effet est similaire à celui du cas  $k \neq l$ . On trouve la nouvelle  $L$ -incidence en tronquant à la longueur  $L$  ce qui résulte du changement de base suivant :

$$\begin{cases} P^s \mapsto P^s & \text{si } s \neq k \\ P^k \mapsto P^k + \epsilon g P^k \end{cases}$$

Si  $B_{i-1} = \{Q^1, \dots, Q^r\}$  désignent les relevés d'indices  $i-1$ , les matrices de  $L$ -incidence de  $\partial_i^{\xi_0}, \partial_i^{\xi_1}$  vérifient :

$$\begin{aligned} A_i^{\xi_1} &= A_i^{\xi_0} + \epsilon \text{tr}_L \left( \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ g \langle P^k, Q^1 \rangle_L^{\xi_0} & \dots & g \langle P^k, Q^r \rangle_L^{\xi_0} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right) \text{Ligne } k\text{-ème} \\ &= \text{tr}_L \left( \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon g & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} A_i^{\xi_0} \right) = \text{tr}_L (E_{kk}^{\epsilon g} A_i^{\xi_0}) \end{aligned}$$

2.  $\chi \in \text{int}(H^+)$ . Dans ce cas la nouvelle  $L$ -incidence correspond à tronquer à la longueur  $L$  après avoir fait le changement de base (des  $\Lambda_{-u}$ -modules engendrés par les bases  $B_0$ ) qui ne fait varier aucun des  $P^s$  sauf  $P^k$  qui est modifié comme suit :

$$\begin{aligned} P^k &\mapsto P^k + \epsilon g(P^k + \epsilon g(P^k + \epsilon g(\dots = P^k + \epsilon g P^k + (\epsilon g)^2 P^k + (\epsilon g)^3 P^k + \dots \\ &= (1 + \epsilon g + (\epsilon g)^2 + (\epsilon g)^3 + \dots) P^k = (1 + \lambda_{\epsilon g}) P^k \end{aligned}$$

La relation entre les matrices de  $L$ -incidence est donc :

$$\begin{aligned} A_i^{\xi_1} &= A_i^{\xi_0} + \text{tr}_L \left( \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{\epsilon g} \langle P^k, Q^1 \rangle_L^{\xi_0} & \dots & \lambda_{\epsilon g} \langle P^k, Q^r \rangle_L^{\xi_0} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right) \text{Ligne } k\text{-ème} \\ &= \text{tr}_L \left( \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_{\epsilon g} & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} A_i^{\xi_0} \right) = \text{tr}_L (E_{kk}^{\lambda_{\epsilon g}} A_i^{\xi_0}) \end{aligned}$$

L'effet algébrique sur les matrices  $A_{i+1}^{\xi_0}, A_{i+1}^{\xi_1}$  associées à  $\partial_{i+1}^{\xi_0}, \partial_{i+1}^{\xi_1}$  se traite de façon analogue. La remarque suivante esquisse les différences avec le cas que nous avons décrit.  $\square$

**Remarque 2.2.37.** L'étude de la relation entre les matrices de  $L$ -incidence associées à  $\partial_{i+1}^{\xi_0}, \partial_{i+1}^{\xi_1}$  passe par faire l'étude de comment la variété instable associée à un relevé  $g'R$  d'indice  $i+1$  rencontre la variété stable de  $gP^k$ . La présence d'une liaison  $\ell_j$  de  $g'R$  vers  $P^l$  comporte l'apparition/disparition de liaisons  $\ell'_j$  de  $g'R$  vers  $gP^k$ . Par définition de l'enroulement, on a  $e(\ell_j) = (g')^{-1}$  et  $e(\ell'_j) = (g')^{-1}g$ . On a ainsi la relation  $e(\ell'_j) = e(\ell_j) \cdot g$  : le coefficient  $g$  du glissement multiplie cette fois à droite la nouvelle incidence. Ceci explique, comme on avait

annoncé dans la note en bas de page numéro 2, le choix inusuel de prendre des matrices par lignes et non par colonnes : on interprète le glissement comme un endomorphisme  $E$  sur le  $\Lambda_{-u}$ -module  $C_i(\alpha)$ . Vu l'effet du glissement sur les relevés des zéros d'indice  $i$ , les seules  $L$ -incidences qui changent sont celles de  $P^l$ . La convention usuelle sur les matrices dirait qu'il faut modifier la colonne  $l$ -ème, et une multiplication à droite par une matrice élémentaire s'imposerait : on devrait avoir donc la relation  $A_i^{\xi_1} = \text{tr}_L(A_i^{\xi_0} E_{kl}^{eg})$ . Mais ceci modifie l'ancienne  $L$ -incidence en multipliant par  $g$  à droite. Étant donné que l'étude géométrique du glissement montre que le coefficient du glissement agit à gauche sur les points d'indice  $i$ , on est contraints à faire multiplier la matrice élémentaire associée au glissement à gauche de celle donnée par la différentielle. Pour que le résultat de ce produit matricielle représente le changement algébrique trouvé, on est amené à prendre des matrices par lignes.

Quant au signe des liaisons, on peut voir qu'ils sont maintenant liés par l'égalité  $\eta(\ell'_j) = \epsilon\eta(\ell_j)$  si le rayon  $I_j$  associé à la liaison  $\ell_j$  est contenu dans  $\Delta^-$  et  $\eta(\ell'_j) = -\epsilon\eta(\ell_j)$  si le rayon  $I_j$  est contenu dans  $\Delta^+$ . Le changement de signe vient du fait que les variétés invariantes  $W^u(g'R)$  qui introduisent les nouvelles liaisons sont maintenant supportées sur la *reliure*  $W^u(P^l)$ , et non sur la *reliure*  $W^s(gP^k)$ . Une façon de le voir est de *mettre la tête à l'envers*, ce qu'ici veut dire que l'on considère la primitive  $-h$  et l'anneau  $\mathbb{Z}[\pi_1 M]$  complété avec  $u$  à la place de  $-u$ .

**Notation 2.2.38.** Soit  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  désigne un glissement  $L$ -élémentaire pour  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  comme dans 2.2.36.

1. Si  $k \neq l$ , on dit que  $P^l$  glisse par dessus de  $\epsilon g P^k$  en  $t = t_0$  et on le note par  $P^l / \epsilon g P^k$ .
  - (a) Si  $k = l$  et  $\chi \in H^-$ , on dit que  $P^k$  glisse par dessus de  $\epsilon g P^k$  en  $t = t_0$  et on le note par  $P^k / \epsilon g P^k$ .
  - (b) Si  $k = l$  et  $\chi \in H^+$ , on dit que  $P^k$  glisse par dessus de  $\lambda_{\epsilon g} P^k$  en  $t = t_0$  et on le note par  $P^k / \lambda_{\epsilon g} P^k$ .

La forme de Morse  $\alpha$  ne varie pas dans la proposition suivante. Partant d'un équipement  $L$ -transverse  $(\xi_0, B_0)$ , on construit un glissement  $L$ -élémentaire (voir 2.2.31) qui réalise un glissement de  $P^l$  au dessus de  $\epsilon g P^k$ , pour  $k \neq l$ . Il s'agit d'une sorte d'analogue pour les champs de vecteurs basés de l'énoncé 1 du théorème 2.2.13.

**Proposition 2.2.39.** Soit  $\alpha$  une 1-forme fermée de Morse dont les indices des zéros varient dans  $\{2, \dots, n-1\}$ . Soit  $(\xi_0, B_0)$  un équipement  $L$ -transverse pour  $\alpha$ . Soient  $P^l, P^k \in B$ ,  $k \neq l$  de même indice  $i$ ,  $\epsilon = \pm 1$  et  $g \in \pi_1 M$  tels que

- $u(g) \geq -L$ ,
- et  $h(P^l) > h(gP^k)$  où  $h$  désigne une primitive de  $\alpha$ .

Alors il existe un chemin  $L$ -transverse  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  d'équipements pour  $\alpha$  qui est de glissement  $L$ -élémentaire (2.2.31) et qui vérifie :

- pour tout  $t \in [0, 1]$  on a  $B_t = B_0$ ,
- l'unique liaison  $L$ -élémentaire, qui a lieu en  $t = t_0$ , est la projection de  $W^u(P_{t_0}^l) \cap W^s(gP_{t_0}^k)$  et vient munie du signe  $\epsilon$ .

*Démonstration.* L'ensemble suivant est formé des relevés concernés par la  $L$ -transversalité :

$$\text{Rel} := \left\{ g'R \in \text{Crit } h \mid \begin{array}{l} R \in B_0 \\ g' \in \pi_1 M \text{ tel que } |u(g')| < L \end{array} \right\}.$$

Prenons  $N$  un niveau du revêtement universel  $\widetilde{M}$  donné par  $h^{-1}(c)$  où  $c \in ]h(gP^k), h(P^l)[$ . Voyons que ce niveau  $N$  de dimension  $n$  est connexe. Soient  $x, y \in N$ , et prenons un chemin  $\mu_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M}$  qui va de  $x$  vers  $y$  dans le connexe par arcs  $\widetilde{M}$ . Si  $D$  désigne un petit voisinage compact de l'image de  $\mu_{x,y}$ , seule une quantité finie des variétés  $W^{s/u}(R')$ , où  $R' \in \text{Rel}$ , a intersection non-vide avec  $D$ . On note par  $\Delta$  la réunion des variétés invariantes mentionnées qui intersectent  $D$ . Le compact  $\Delta \cap D$  est de codimension strictement supérieure à 1 dans  $D$  par hypothèse. Ainsi, génériquement  $\mu([0, 1]) \cap \Delta = \emptyset$ . On peut alors pousser  $\mu_{x,y}$  par le flot de  $\xi_0$  en un chemin  $\nu_{x,y} : [0, 1] \rightarrow N$ , allant de  $x$  à  $y$ . De plus, tel que  $\mu_{x,y}$  a été choisi, son poussé  $\nu_{x,y}$  dans le niveau  $N$  ne rencontre pas la trace dans  $N$  des variétés invariantes  $W^{s/u}(g'R)$  mentionnées ci-dessus. On peut exiger que  $\pi \circ \nu_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \pi(N)$  soit un plongement vu que la feuille  $\pi(N)$  est de dimension  $n \geq 3$ .

Regardons  $D(P^l), A(gP^k)$  les traces respectives de  $W^u(P^l), W^s(gP^k)$  dans  $N$ . On peut choisir  $a \in D(P^l)$  en dehors de  $\cup_{R' \in \text{Rel}} W^s(R')$  du fait que cette réunion est aussi de codimension strictement supérieure à 1 dans  $D(P^l)$ . Le même argument permet de trouver un  $b \in A(gP^k)$  en dehors de  $\cup_{R' \in \text{Rel}} W^u(R')$ . On prend un segment  $\nu_a : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow N$  qui vérifie :

1. l'image de  $\nu_a$  ne rencontre aucune trace des variétés invariantes associées aux points de Rel sauf  $D(P^l)$ ,
2. l'intersection  $\text{Im}(\nu_a) \cap D(P^l)$  est réduite au point  $a = \nu_a(0)$ ,
3. le vecteur  $T\nu_a(0)$  est dans un supplémentaire de  $T_a D(P^l)$  dans  $T_a N$ .

On trouve aussi un  $\nu_b : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow N$  vérifiant :

1. l'image de  $\nu_b$  ne rencontre aucune trace des variétés invariantes associées aux points de Rel sauf  $A(gP^k)$ ,
2. l'intersection  $\text{Im}(\nu_b) \cap A(gP^k)$  est réduite au point  $b = \nu_b(0)$ ,
3. le vecteur  $T\nu_b(0)$  est dans l'espace vectoriel engendré par la co-orientation de  $T_b A(gP^k)$  dans  $T_b N$  induite par la co-orientation de  $W^s(gP^k)$ .

Si on appelle  $a^+ := \nu_a(\varepsilon)$  et  $b^- := \nu_b(-\varepsilon)$ , on peut trouver un chemin  $\nu_{a^+, b^-} : [0, 1] \rightarrow N$  allant de  $a^+$  à  $b^-$  comme précédemment. Prenons enfin le chemin

$$\gamma : [-\varepsilon, 1 + \varepsilon] \rightarrow N \quad \text{donné par la concaténation} \quad \nu_a * \nu_{a^+, b^-} * \nu_b$$

où on suppose que  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ . Par construction de  $\gamma$ , on peut trouver  $S$  un voisinage de  $\text{Im}(\gamma)$  dans  $N$  tel que la projection  $\pi|_S$  reste injective, et une isotopie<sup>11</sup>  $(G_t)_{t \in [0, 1]}$  de  $S$  qui vérifie :

- il existe un voisinage  $V$  de  $\partial S$  dans  $S$  tel que  $G_t|_V = \text{Id}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ,
- on a  $G_t(a) = \gamma((1 + \varepsilon)t)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ,

11. On peut consulter [Mi2, Pg. 96] pour les détails de la construction d'une telle isotopie.



- le sous-ensemble  $\bigcup_{t \in [0,1]} G_t(D(P^l) \cap (S \setminus V))$  est une sous-variété de dimension  $i + 1$  de  $S$  qui intersecte transversalement  $W^s(gP^k)$  en un seul point  $b = G_{t_0}(a)$ , où  $t_0 := \frac{1}{1+\epsilon}$ .

On obtient un signe, que l'on note par  $\zeta$ , en comparant l'orientation donnée par la classe  $[\{T_1\gamma(\frac{\partial}{\partial t}), (G_{t_0})_*(\text{Or}_{T_a D(P^l)})\}]$  avec la co-orientation de  $T_b A(gP^k)$ . Ce signe coïncide avec celui que l'on obtient comme dans 2.2.32. Si on avait obtenu  $\zeta = -\epsilon$ , on choisit, à la place de  $\nu_b$ , le segment  $\overline{\nu_b}$  centré en  $b$  et parcouru dans le sens opposé à  $\nu_b$ ; ceci force  $\zeta = \epsilon$ .

On change d'échelle le champ de vecteurs  $\xi_0$  autour de  $\pi(S)$  en le multipliant par la fonction  $f := \frac{-1}{\alpha(\xi_0)} > 0$ . Ainsi, si  $(\psi_t)_{t \in [-\delta, \delta]}$  désigne le groupe local à un paramètre associé au champ relevé  $(f \circ \pi) \cdot \tilde{\xi}_0$ , on a  $h(\psi_t(x)) = h(x) - t$  pour tout  $t \in [-\delta, \delta]$ . Posons  $\Psi : S \times [-\delta, \delta] \rightarrow \widetilde{M}$  le plongement donné par  $\Psi(x, t) := \psi_t(x)$ . Quitte à prendre  $\delta > 0$  plus petit, on peut supposer que

- la projection  $\pi$  est toujours injective sur  $U := \text{Im}(\Psi)$ ,
- l'intersection  $U \cap W^{s/u}(R') = \emptyset$  pour tout  $R' \in \text{Rel}$  sauf pour  $W^u(P^l)$  et  $W^s(gP^k)$ ,
- on a la relation des niveaux  $[c - \delta, c + \delta] \subseteq ]h(gP^k), h(P^l)[$ .

Restreignons l'attention sur  $U^+ := \Psi(S \times [-\delta, 0])$  pour y définir une isotopie. On prend  $\omega : [-\delta, 0] \rightarrow [0, 1]$  comme dans la figure 2.11.

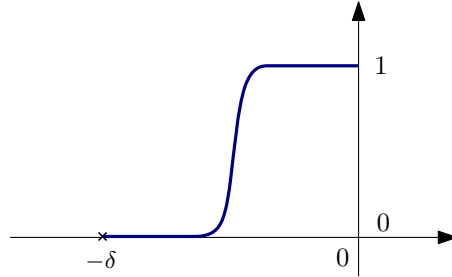


FIGURE 2.11 – Graphe de  $\omega$

On construit le difféomorphisme de  $S \times [-\delta, 0]$  donné par

$$\begin{aligned} H_1 : S \times [-\delta, 0] &\longrightarrow S \times [-\delta, 0] \\ (x, t) &\longmapsto (G_{\omega(t)}(x), t) \end{aligned}$$

et qui est clairement isotope à l'identité via  $H_s(x, t) := (G_{s\omega(t)}(x), t)$ , où  $s \in [0, 1]$ . L'isotopie  $(H_s)_{s \in [0, 1]}$  induit une autre sur  $U^+$ , via le plongement  $\Psi$ , que l'on note de la même façon. On considère finalement le chemin de pseudo-gradients  $((H_t)_*(\tilde{\xi}_0|_{U^+}))_{t \in [0, 1]}$ . Grâce au choix de  $\omega$  et du fait que les lignes verticales  $\{x\} \times [-\delta, \delta]$ ,  $x \in S$  correspondent aux lignes de flot de  $(f \circ \pi) \cdot \tilde{\xi}_0$  dans  $U$  via le plongement  $\Psi$ , la famille de champs de vecteurs construite coïncide avec  $\tilde{\xi}_0$  sur  $\Psi(S \times \{0\})$  à changement d'échelle près. On peut ainsi prolonger la famille  $((H_t)_*(\tilde{\xi}_0|_{U^+}))_{t \in [0, 1]}$  sur  $\Psi(S \times [0, \delta])$  par  $\tilde{\xi}_0$ , famille que l'on note par  $(\tilde{\xi}_t|_U)_{t \in [0, 1]}$ . On remarque que  $\tilde{\xi}_t$  coïncide avec  $\tilde{\xi}_0$  sur le bord  $\partial U$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ; ainsi, on peut étendre  $\tilde{\xi}_t|_U$  à  $\pi_1 M \cdot U$  de façon  $\pi_1 M$ -équivariante et on prolonge par  $\tilde{\xi}_0$  dans  $\widetilde{M} \setminus (\pi_1 M \cdot U)$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

La famille  $\xi_t := \pi_*(\tilde{\xi}_t)$  convient : on ne perd pas la  $L$ -transversalité des champs des vecteurs  $\xi_t$ ,  $t \neq t_0$  du fait qu'il n'y a pas d'accident entre les variétés invariantes concernées par la

$L$ -transversalité lors de la déformation si  $t \neq t_0$ . En  $t = t_0$ , les variétés  $W^u(P_{t_0}^l)$  et  $W^s(gP_{t_0}^k)$  associées à  $\tilde{\xi}_{t_0}$  s'intersectent le long d'une seule liaison  $\ell$  telle que  $\ell \cap N = \{b\}$ . Par construction,  $T_b(W^u(P_{t_0}^l) \cap N)$  et  $T_b(W^s(gP_{t_0}^k) \cap N)$  n'ont pas de direction commune, situation qui se propage le long de  $\ell$  par le flot de  $\tilde{\xi}_0$ ; on a donc  $T_x W^u(P_{t_0}^l) \cap T_x W^s(gP_{t_0}^k) = T_x \ell$  pour tout  $x \in \ell$ ; le pseudo-gradient  $\xi_{t_0}$  est bien dans  $G_L^1$ , vu que le  $u$ -enroulement de  $\ell$  vérifie  $u(g) > -L$ , et la traversée de  $G_L^1$  est transverse par construction : ceci est assuré du fait que le vecteur  $T_1 \gamma(\frac{\partial}{\partial t})$  n'est pas dans l'espace engendré par l'orientation  $(G_{t_0})_*(\text{Or}_{T_a D(P^l)})$  et n'appartient pas non plus à  $T_b A(gP^k)$ .  $\square$



# Chapitre 3

## Mise sous forme normale

### 3.1 Préparation des chemins

#### 3.1.1 Mise en évolution normale

**Définition 3.1.1.** *Un chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est dit d'évolution normale si*

- *il est générique,*
- *tout temps de naissance précède tout temps d'élimination.*

**Notation 3.1.2.** Pour un chemin générique,  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  l'ensemble des instants singuliers  $S$  où  $\alpha_t$  n'est pas Morse, est la réunion de deux ensembles finis disjoints  $N, E$  de l'intervalle  $[0, 1]$  qui correspondent respectivement aux instants de naissance et d'élimination. On note par

$$t_N := \max N \quad \text{et} \quad t_E := \min E.$$

Pour un chemin d'évolution normale on a  $t_N < t_E$  et on appelle respectivement

- intervalle des naissances l'intervalle  $[0, t_N]$ ,
- intervalle des éliminations l'intervalle  $[t_E, 1]$  et
- intervalle de Morse l'intervalle  $]t_N, t_E[$ .

Voyons comment se ramener à une situation d'évolution normale :

**Lemme 3.1.3.** *( $\dim(M) > 1$ ) Tout chemin générique  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  se déforme, à extrémités fixes, en un autre  $(\nu_t)_{t \in [0,1]}$  d'évolution normale.*

*Démonstration.* L'argument fondamental de la preuve repose sur le fait que si la dimension de la variété est assez grande ( $\dim(M) > 1$ ), on peut déplacer à gauche les instants de naissance. La version fonctionnelle de ce lemme se trouve dans [Lau1, Lemma 2.4].

Munissons  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  de primitives  $(h_t)_{t \in [0,1]}$ . En utilisant les notations de 3.1.2, on définit l'ensemble fini d'instants  $\Delta^\alpha := \{t \in N \mid t > t_E\}$ . Si  $\sharp \Delta^\alpha = 0$ , la famille  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est déjà d'évolution normale. Sinon, il suffit d'appliquer  $\sharp \Delta^\alpha$  fois le procédé que l'on explique ci-dessous dont l'effet est de réduire le cardinal de  $\Delta^\alpha$  d'une unité.

Prenons un  $t_1 \in \Delta^\alpha$  et appelons  $b^1 \in Z(\alpha_{t_1})$  le zéro de naissance. Par le théorème 2.2.12, il existe un  $\varepsilon > 0$  assez petit tel que  $(\alpha_t)_{t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]}$  est un chemin de naissance centré en  $t_1$ .

Prenons un temps  $t_0$  vérifiant  $\varepsilon < t_0 < t_E$ . Appelons  $(C_t)_{t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]}$  la famille de cylindres qui modèle le chemin de naissance. On choisit deux points de  $[0, 1] \times \widetilde{M}$  :

- un  $K = (t_0 - \varepsilon, x)$  tel que  $x \in \widetilde{M} \setminus \text{Crit}(h_{t_0 - \varepsilon})$  et
- un  $L = (t_1 - \varepsilon, y)$  tel que  $y$  est à l'intérieur du cylindre  $C_{t_1 - \varepsilon}$ .

Comme  $[0, 1] \times \widetilde{M}$  est connexe et de dimension  $n + 2$ , la sous-variété

$$\mathcal{T} := \left\{ (t, P_t) \in [0, 1] \times \widetilde{M} \mid P_t \in \text{Crit}(h_t) \right\}$$

de dimension 1 ne peut pas déconnecter  $[0, 1] \times \widetilde{M}$  dès que  $n + 2 > 2$ . Or  $n + 1 = \dim(M) > 1$  dans notre étude, et  $\left([0, 1] \times \widetilde{M}\right) \setminus \mathcal{T}$  est connexe. Nous pouvons ainsi trouver un chemin

$$\begin{array}{ccc} \gamma : [t_0 - \varepsilon, t_1 - \varepsilon] & \longrightarrow & \left([0, 1] \times \widetilde{M}\right) \setminus \mathcal{T} \\ t & \longmapsto & (t, x_t) \end{array}$$

allant de  $K$  à  $L$  dont la deuxième coordonnée, que l'on note par  $x_t$ , est un point régulier de  $h_t$ . On remarque qu'à chaque fois que l'on se donne un point régulier  $x$  d'une primitive  $h$  de  $\alpha$ , on peut trouver un cylindre  $C$  contenant  $x$ , adapté à  $\alpha$  et feuilleté en disques par les niveaux de  $h$ . Autrement dit,  $\alpha|_{\pi(C)}$  est semi-conjugue à  $F_{-\varepsilon}$ , l'extrémité initiale d'un modèle de naissance centré en 0 au sens de 2.2.9. On choisit en conséquence une famille de cylindres  $(C_{t-\varepsilon, 0})_{t \in [t_0, t_1]}$  tels que pour tout  $t \in [t_0, t_1]$  la 1-forme  $\alpha_{t-\varepsilon}|_{\pi(C_{t-\varepsilon, 0})}$  est semi-conjugue à  $F_{t-\varepsilon}$ , l'extrémité initiale d'un modèle de naissance centré en  $t$ . On applique la partie 2 du théorème 2.2.13 aux données suivantes :

- le chemin de 1-formes munies de cylindres  $(\alpha_{t-\varepsilon}, C_{t-\varepsilon, 0})_{t \in [t_0, t_1]}$ ,
- le chemin de naissance  $(\beta_{t_1-\varepsilon, s})_{s \in [0, 2\varepsilon]}$ , où  $\beta_{t_1-\varepsilon, s} := \alpha_{t_1-\varepsilon+s}$ .

On trouve ainsi pour tout  $t \in [t_0, t_1]$  un chemin de naissance muni des cylindres  $(\beta_{t-\varepsilon, s}, C_{t-\varepsilon, s})_{s \in [0, 2\varepsilon]}$  centré en  $t$  et issu de  $\alpha_{t-\varepsilon}$ . La famille à deux paramètres de 1-formes  $(\beta_{t-\varepsilon, s})_{(t, s) \in [t_0, t_1] \times [0, 2\varepsilon]}$  restreinte aux cylindres associés ne contient que des zéros de type Morse et de type naissance. Le diagramme de la figure 3.1 représente dans l'espace de paramètres sa position relative à la stratification décrite en 2.2.2 : les paramètres de stabilisation sont notés par  $S$  comme dans 2.2.3.

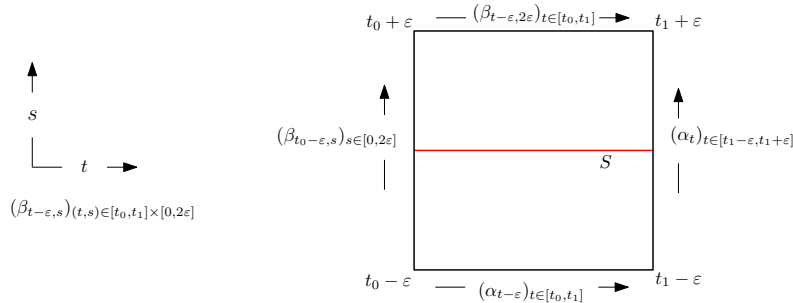


FIGURE 3.1 – Trace de la famille  $(\beta_{t-\varepsilon, s})_{(t, s) \in [t_0, t_1] \times [0, 2\varepsilon]}$  restreinte aux cylindres associés.

On définit la famille  $(\nu_t)_{t \in [0,1]}$  comme suit :

$$\nu_t = \begin{cases} \alpha_t & \text{si } t \in [0, t_0 - \varepsilon] \\ \beta_{t_0 - \varepsilon, t - (t_0 - \varepsilon)} & \text{si } t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \\ \beta_{t - 2\varepsilon, 2\varepsilon} & \text{si } t \in [t_0 + \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \\ \alpha_t & \text{si } t \in [t_1 + \varepsilon, 1] \end{cases}$$

La famille  $(\alpha_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]}$  parcourt le côté inférieur puis le côté droit du carré de la figure 3.1 tandis que la famille  $(\nu_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]}$  parcourt le côté gauche puis le côté supérieur du même carré. Les temps de naissance de  $(\nu_t)_{t \in [0,1]}$  sont  $(N \setminus \{t_1\}) \cup \{t_0\}$  et ceux d'élimination n'ont pas changé. Ainsi le sous-ensemble des temps de naissance postérieurs à une élimination de  $\nu_\bullet$  vérifie  $\Delta^\nu = \Delta^\alpha \setminus \{t_1\}$ . Dans la figure 3.2 on représente les graphiques de Cerf-Novikov de deux chemins  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ ,  $(\nu_t)_{t \in [0,1]}$  ainsi que d'un autre chemin intermédiaire, tous les trois associés à une famille à deux paramètres comme celle du procédé que nous venons de décrire.  $\square$

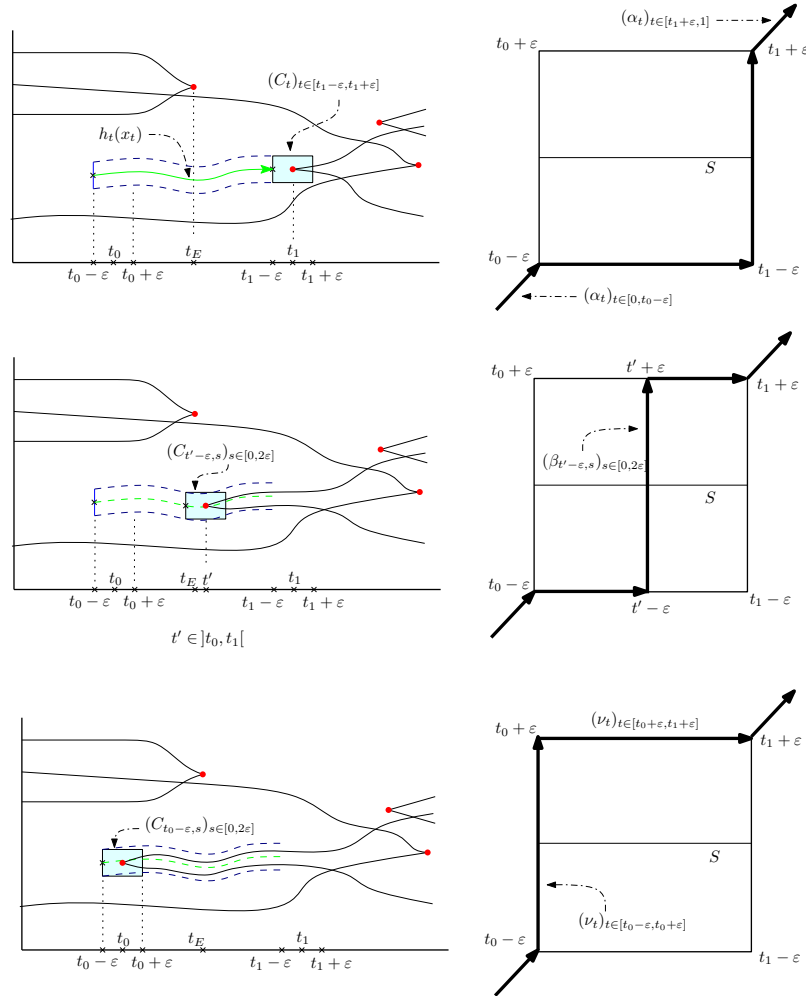


FIGURE 3.2 – Graphiques de Cerf-Novikov de trois chemins associés au procédé de mise en évolution normale.

**Remarque 3.1.4.** Un procédé analogue à celui du lemme précédent 3.1.3 permet de déplacer les instants d'élimination à droite.

### 3.1.2 Élimination des centres

**Définition 3.1.5.** Un zéro  $p$  d'une 1-forme  $\alpha$  est dit centre si son indice est extrémal ( $\text{ind}(p) \in \{0, n+1\}$ ).

**Définition 3.1.6.** Soit  $\alpha$  une 1-forme de Morse équipée d'une primitive  $h$  de  $\pi^*\alpha$  et de relevés  $B_*$  des zéros  $Z(\alpha)$ . Soit  $C \in B_0$  un relevé d'un centre  $c$  d'indice 0 de  $\alpha$ . On dit qu'un point critique  $D$  d'indice 1 de  $h$  est une selle connectante pour  $C$  s'il vérifie les conditions suivantes :

1. le point  $D$  est au-dessus de  $C$  ; appelons  $\delta := h(D) - h(C) > 0$ .
2. Il existe un  $L > \delta$  et un pseudo-gradient  $\xi$  de  $\alpha$  qui est  $L$ -transverse pour les relevés  $B_*$  tels que
  - (a) une et une seule des deux séparatrices de  $D$  descend jusqu'à  $C$  (il n'y a qu'une liaison allant de  $D$  à  $C$ ) ,
  - (b) aucun autre point critique  $D'$  d'indice 1 strictement en dessous de  $D$  ne vérifie la dernière condition.

**Lemme 3.1.7.** Dans le contexte de la définition 3.1.6,  $C$  admet une selle connectante.

*Démonstration.* Équipons  $\alpha$  avec un pseudo-gradient Morse-Smale noté  $\xi$ . Le couple  $(\xi, B_*)$  est en particulier  $L$ -transverse pour tout  $L > 0$ . On rappelle que nous avons un morphisme de  $\Lambda_{-u}$ -modules  $\partial_1^\xi : C_1(\alpha) \rightarrow C_0(\alpha)$  provenant de la différentielle  $\partial_*^\xi$  de 2.1.30. Supposons par l'absurde que  $C$  n'admette pas de selle connectante et considérons le sous-ensemble de  $\widetilde{M}$  suivant :

$$\mathcal{S} := \left\{ D \in \text{Crit}(h) \cap h^{-1}(]h(C), +\infty[) \mid \begin{array}{l} D \in \overline{W^s(C)} \\ \text{ind}(D) = 1 \end{array} \right\}.$$

Si  $\mathcal{S} = \emptyset$ , on a clairement  $C \notin \text{Im}(\partial_1^\xi)$ . Si par contre  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ , on peut prendre  $\nu := \inf h(\mathcal{S})$  du fait qu'il s'agit d'une partie non-vide de  $\mathbb{R}$  qui est minorée par  $h(C)$ . Il y a forcément un  $D \in \mathcal{S}$  tel que  $h(D) = \nu$ , vu que les ensembles des longueurs des liaisons  $\mathcal{L}(d', c)$ ,  $d' \in \pi(B_1)$  sont discrets : les ensembles de liaisons  $\mathcal{L}_L(d', c)$  de longueur inférieure ou égale à  $L > 0$  (voir 2.1.18) sont finis pour tout  $L > 0$  et pour tout couple de zéros  $(d', c)$  tels que  $\text{ind}(d') = \text{ind}(c) + 1$  quand  $\xi$  est Morse-Smale, cas particulier de [Lat, Prop. 2.11].

Le point critique  $D$  a déjà une séparatrice allant vers  $C$ . Par définition de  $\nu$ , il n'y a pas d'autre point critique d'indice 1 en dessous de  $D$  lié à  $C$  ; comme on a supposé que  $C$  n'admet pas de selle connectante, la seule possibilité qui reste à  $D$  est d'avoir sa deuxième séparatrice allant vers  $C$ . Soit  $g := g(D) \in \pi_1 M$  tel que  $D' := gD \in B_1$ . L'incidence  $\langle D', C \rangle^\xi$  est dans  $\{0, \pm 2g\}$ , en fonction des signes des séparatrices allant de  $D$  à  $C$ . On peut répéter l'argument avec  $\mathcal{S} \setminus \{D\}$ . Dans tous les cas on trouve que  $C \notin \text{Im}(\partial_1^\xi)$ , en particulier parce que  $1 \notin (2\mathbb{Z}[\pi_1 M], +)$ . Nous aurions ainsi  $0 \neq [C] \in H_0(M, -u)$ , contradiction avec le fait que ce groupe d'homologie de Novikov est nulle dès que  $u \neq 0$ .  $\square$

**Lemme 3.1.8.** *Soit  $\alpha$  une 1-forme de Morse et soit  $C$  un relevé d'un centre d'indice 0 de selle connectante  $D$ . Il existe un chemin générique  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  commençant en  $\alpha$  qui ne traverse la strate des naissances/éliminations qu'à un seul instant, et qui réalise l'élimination du couple de zéros de  $\alpha$  associé à  $(D, C)$ .*

*Démonstration.* Prenons  $h$  une primitive de  $\alpha$ ,  $B_*$  un ensemble de relevés des zéros de  $\alpha$  contenant  $C$  et soit  $\xi$  un pseudo-gradient  $L$ -transverse comme dans 3.1.6, en particulier  $L > h(D) - h(C)$ . La variété instable de  $D$  a deux séparatrices : une et une seule qui tend vers  $C$  que l'on note par  $\ell$  et une deuxième que l'on note par  $\ell'$ . Si  $\ell'$  ne descend pas indéfiniment, elle tend vers un minimum local  $C'$  de  $h$  différent de  $C$ .

Montrons que si  $h(C') > h(C)$  on a que  $C'$  n'est pas dans la  $\pi_1 M$ -orbite de  $C$ . En effet, s'il existe un  $g \in \pi_1 M$  tel que  $C' = gC$ , nous avons que  $u(g) > 0$  du fait que  $h(C') = u(g) + h(C)$ . Par  $\pi_1 M$ -équivariance, nous avons la séparatrice  $g^{-1}\ell'$  du point critique  $g^{-1}D$  d'indice 1 qui tend vers  $C = g^{-1}C'$ . Nous avons les inégalités  $h(D) > h(g^{-1}D) > h(C)$ , la première du fait que  $u(g^{-1}) < 0$  et la deuxième du fait qu'il y a une liaison de  $g^{-1}D$  vers  $C$ . Les dernières inégalités des valeurs critiques de  $h$  contredisent la propriété (2b) de 3.1.6 que  $D$  doit vérifier du fait qu'elle est une selle connectante pour  $C$ .

Il y a donc aucune obstruction à faire descendre de façon  $\pi_1 M$ -équivariante les valeurs des minima locaux de  $h$  ; ainsi, si  $h(C') > h(C)$ , on peut faire descendre la valeur de  $C'$  sans que celle de  $C$  ne descende pour se placer dans la situation  $h(C') < h(C)$ . L'adhérence de la variété stable de  $C$  peut contenir des points critiques de  $h$  qui sont strictement en dessous de  $D$ , mais l'ensemble

$$\Delta := \overline{W^s(C)} \cap h^{-1}(]-\infty, h(D)[) \cap \text{Crit}(h)$$

est fini grâce au fait que  $\xi$  est  $L$ -transverse et que  $L > h(D) - h(C)$ . Appelons  $m := \min h(\Delta \setminus \{C\}) > h(C)$ . On trouve ainsi un  $0 < \varepsilon < m - h(C)$  et un arc fermé  $I$  plongé dans  $W^u(D)$  dont les extrémités sont au niveau de  $h(C) + \varepsilon$ . On peut ainsi appliquer le lemme de descente 2.2.34 pour situer la valeur de  $D$  à la hauteur  $h(C) + \varepsilon$ . On peut prendre  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que l'on puisse trouver un voisinage compact  $U$  de  $\overline{W^u(D)} \cap h^{-1}([h(C) - \varepsilon, +\infty[)$  tel que  $\pi|_U$  soit injective. Le couple  $(h, \xi)|_U$  vérifie ainsi les hypothèses de [Lau1, Lemma 2.7] et grâce à l'injectivité de  $\pi|_U$  nous pouvons appliquer le lemme d'élimination standard de Morse de façon  $\pi_1 M$ -équivariante et on obtient une famille de primitives  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  commençant en  $h_0 = h$  dont la famille de 1-formes  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  associée est celle que l'on cherchait.  $\square$

**Lemme 3.1.9.** *Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin de 1-formes de Morse muni de primitives  $(h_t)_{t \in [0,1]}$ . Supposons que la famille de selles connectantes  $(D_t)_{t \in [0,1]}$  pour le brin de minima locaux  $(C_t)_{t \in [0,1]}$  de  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  soit continue par rapport au paramètre  $t$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , le chemin  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  se déforme à extrémités fixes en un autre  $(\beta_t)_{t \in [0,1]}$  tel que*

- $\sharp Z(\alpha_t) = \sharp Z(\beta_t)$  pour tout  $t \in [0, \varepsilon[ \cup ]1 - \varepsilon, 1]$ ,
- $\beta_\varepsilon, \beta_{1-\varepsilon}$  présentent respectivement un zéro d'élimination et de naissance d'indice 0,
- le couple de zéros  $(D_t, C_t)$  disparaît lors de la déformation pour tout  $t \in ]\varepsilon, 1 - \varepsilon[$ .

*Démonstration.* Prenons un équipement  $L$ -transverse  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  pour  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  où on prend  $L > \max_{t \in [0,1]} h_t(D_t) - h_t(C_t)$ . Pour un instant  $t$  générique, on est dans la situation du lemme 3.1.8 : les variétés  $W^s(C_t)$  et  $W^u(D_t)$  s'intersectent transversalement le long d'une seule orbite



$\ell_t$  et on peut supposer que  $\ell'_t$ , l'autre séparatrice de  $D_t$  descend en dessous du niveau de  $C_t$ . Cependant, il y a une quantité finie d'instant  $(t_j)_{j=1}^N$  où  $\xi_{t_j}$  a une liaison  $L$ -élémentaire au sens de 2.2.26 : il existe un couple de zéros de même indice  $i$  reliés par la liaison  $\ell$  d'enroulement  $g$  tel que  $u(g) \geq -L$ . L'obstruction à éliminer  $D_t$  avec  $C_t$  est la présence d'un point critique  $D'_t \in \overline{W^u(D_t)} \cap h_t^{-1}(]h(C_t), +\infty[)$  d'indice 1. Il n'y a ainsi que deux situations qui empêchent a priori l'élimination comme dans 3.1.8 ; elles sont représentées dans la figure 3.3.

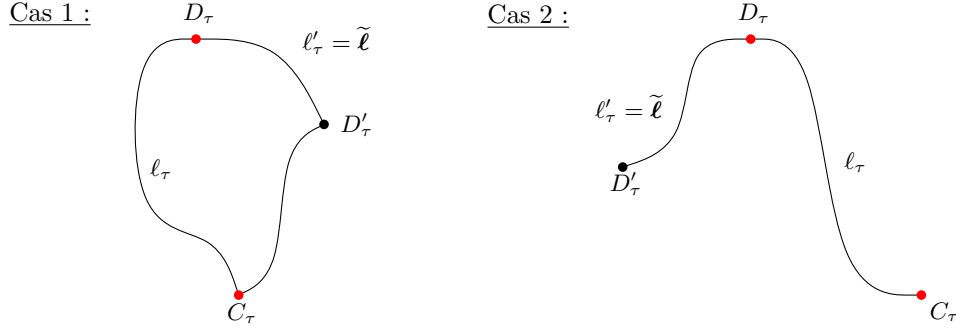


FIGURE 3.3 – Situations possibles où un point critique  $D'_\tau$  d'indice 1 peut se trouver dans  $\overline{W^u(D_\tau)}$  pour un temps  $\tau$  avec liaison  $L$ -élémentaire.

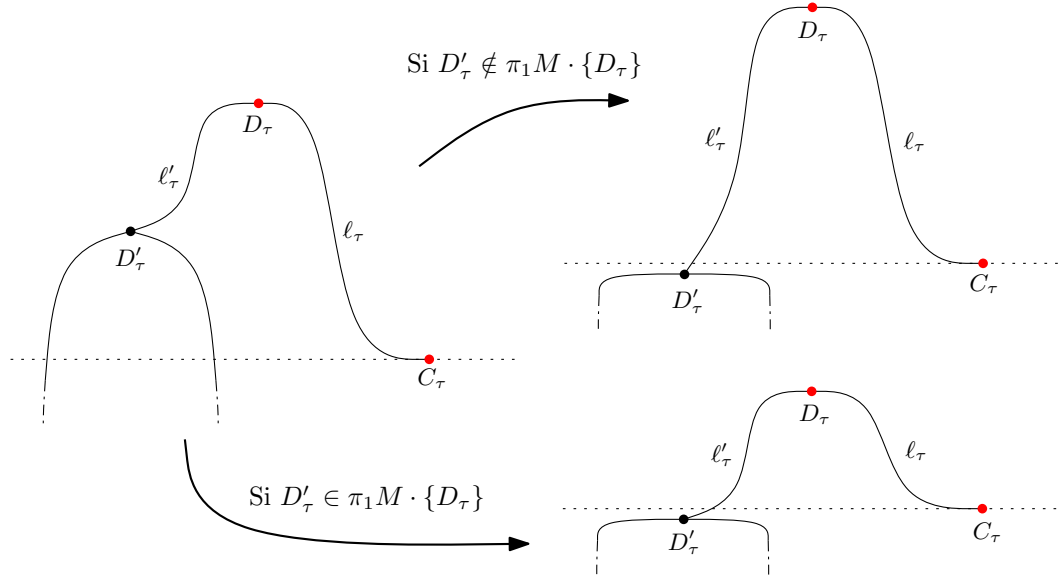
Dans les deux cas, l'instant  $\tau$  est parmi la collection finie de temps  $(t_j)_{j=1}^N$  où  $\xi_t$  a une liaison  $L$ -élémentaire, et la liaison  $\tilde{\ell}$  relevée de  $\ell$  et partant de  $D_\tau$  coïncide avec la séparatrice  $\ell'_\tau$  de  $D_\tau$  qui ne tend pas sur  $C_\tau$ , ceci du fait qu'il n'y a que deux liaisons qui partent d'un point critique d'indice 1 et la liaison  $\ell_\tau$  est piégée dans  $W^s(C_\tau)$  par hypothèse.

Premier cas :  $D'_\tau \in \overline{W^s(C_\tau)}$ . Il est facile de se convaincre que ce cas ne survient pas : pour certains temps  $t$  proches de  $\tau$ , la séparatrice  $\ell'_t$  de  $D_t$  tend aussi vers  $C_t$ . Le point critique  $D_t$  d'indice 1 ne peut pas être une selle connectante pour  $C_t$  en conséquence.

Deuxième cas :  $D'_\tau \notin \overline{W^s(C_\tau)}$ . Montrons que l'on peut faire descendre la valeur de  $D'_t$  en dessous de celle de  $C_t$ . On scinde l'étude en deux sous-cas.

1. Supposons qu'il n'y a aucune séparatrice de  $D'_\tau$  qui tend vers un minimum local  $C'_\tau$  tel que  $h_\tau(C'_\tau) > h_\tau(C_\tau)$ . Grâce au lemme 2.2.34, on peut faire descendre, de façon  $\pi_1 M$ -équivariante, la valeur de  $D'_\tau$  au niveau de  $h(C_\tau) - \varepsilon$ , où  $0 < \varepsilon < h_\tau(D_\tau) - h_\tau(D'_\tau)$  est assez petit. En particulier, même si  $D_\tau$  et  $D'_\tau$  définissent la même  $\pi_1 M$ -orbite, ce qui entraîne la descente de la valeur de  $D_\tau$ , celle-ci est toujours au dessus de  $C_\tau$  par le contrôle sur  $\varepsilon$ . Voir la figure 3.4.
2. Supposons qu'il y a une séparatrice  $\ell''_\tau$  de  $D'_\tau$  qui descend sur un minimum  $C'_\tau$  tel que  $h_\tau(C'_\tau) > h_\tau(C_\tau)$ . Ce minimum ne peut pas être dans la  $\pi_1 M$ -orbite de  $C_\tau$ , puisque pour certains  $t$  assez proches, on verrait la séparatrice  $\ell'_t$  de  $D_t$  tendre vers  $C'_t$ , et on a déjà démontré dans 3.1.8 que des telles liaisons ne peuvent pas exister. On n'a ainsi aucune obstruction à faire descendre le minimum  $C'_t$  autant que l'on veut sans que la valeur de  $C_t$  ne descende. On s'est placé dans le premier sous-cas.

La présence d'une liaison de type  $1/1$  n'est ainsi pas un obstacle pour éliminer les couples

FIGURE 3.4 – Descente du niveau de  $D'_\tau$  selon le cas.

$(D_t, C_t)$  pour des  $t$  vivant dans n'importe quelle sous-intervalle de  $[0, 1]$ . Une fois que nous avons fait descendre localement les valeurs des éventuels  $D'_\tau$  en dessous du niveau des  $C_\tau$ , on peut trouver un  $\delta > 0$  et une famille de voisinages compacts  $U_t$  de  $\overline{W^u(D_t)} \cap h_t^{-1}([h_t(C_t) - \delta, +\infty[)$  tels que  $\pi|_{U_t}$  soit injective, et ce pour tout  $t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ . Les couples  $(h_t, \xi_t)|_{U_t}$  vérifient les hypothèses de [Lau1, Lemma 2.7]; on applique ledit lemme à paramètre de façon  $\pi_1 M$ -équivariante. Ceci permet de trouver facilement la famille  $(\beta_t)_{t \in [0, 1]}$  annoncée.  $\square$

**Remarque 3.1.10.** La définition 3.1.6 et les lemmes 3.1.7, 3.1.8 et 3.1.9 admettent une version adaptée pour les centres d'indice  $n + 1$ .

**Proposition 3.1.11.** *Tout chemin générique  $(\alpha_t)_{t \in [0, 1]}$  dont les extrémités sont sans centre se déforme, à extrémités fixes, en un autre chemin générique  $(\beta_t)_{t \in [0, 1]}$  où  $\beta_t$  est sans centre pour tout  $t \in [0, 1]$ .*

*Démonstration.* On traite les centres d'indice 0. Prenons des primitives  $(h_t)_{t \in [0, 1]}$  ainsi qu'un choix continu de relevés  $(B_t)_{t \in [0, 1]}$  pour  $(\alpha_t)_{t \in [0, 1]}$ . Montrons que le chemin de 1-formes basées  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0, 1]}$  se déforme à extrémités fixes en un autre  $(\alpha'_t, B'_t)_{t \in [0, 1]}$  vérifiant les propriétés suivantes :

1. le chemin  $(\alpha'_t)_{t \in [0, 1]}$  est d'évolution normale,
2. les naissances d'indice  $i > 0$  précèdent les naissances d'indice 0,
3. les éliminations d'indice 0 précèdent les éliminations d'indice  $i > 0$ ,

On désigne par  $s \geq 0$  le nombre de naissances d'indice 0 de  $(\alpha_t)_{t \in [0, 1]}$ . Si  $s = 0$  on n'a rien à faire. Appelons  $t_0, t_2$  les instants respectifs de la première naissance et de la première élimination d'indice 0; comme  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  n'ont pas de centre, nous avons forcément un nombre d'éliminations d'indice 0 égal à  $s$  et clairement  $t_0 < t_2$ .

Nous parvenons à  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  par application du lemme 3.1.3 où on choisit d'abord les nouveaux instants de naissance d'indice  $i$  tous dans

- l'intervalle  $]0, t_0[$  si  $i > 0$ ,
- l'intervalle  $[t_0, t_2[$  si  $i = 0$ .

Ensuite, si  $t_1$  désigne l'instant de la dernière élimination d'indice 0 ( $t_2 \leq t_1$ ), on déplace les instants d'élimination d'indice  $i > 0$  à droite tous dans l'intervalle  $]t_1, 1[$ , voir la remarque 3.1.4. On arrive à une famille  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  vérifiant les conditions énoncées ci-dessus.

Soit  $\varepsilon$  tel que l'intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$  ne contienne pas des naissances/éliminations d'indice  $i > 0$ . Décrivons une déformation à extrémités fixes de la famille  $(\alpha'_t)_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]}$  en une autre  $(\alpha_t^{(1)})_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]}$  qui a la propriété de contenir  $s - 1$  naissances d'indice 0, tout en restant d'évolution normale.

On note toujours  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  des primitives associés à  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ . Soit  $t'_0 \in [t_0, t_1]$  un des instants de naissance. Appelons  $n^1$  le zéro de naissance d'indice 0 de  $\alpha_{t'_0}$ . Le choix de relevés  $(B_t)_{t \in [0,1]}$  détermine un seul point critique de naissance  $N^1 \in B_{t'_0}$  et un chemin  $(C_t), t \in ]t'_0, t'_1[$  de minima locaux des primitives, où  $t'_1 \leq t_1$  est l'instant de l'élimination du brin des  $(C_t)$ . Grâce au lemme 3.1.7 on sait que nous pouvons associer une selle connectante  $D_t$  à chaque  $C_t$ , dont la valeur critique  $h_t(D_t)$  varie continûment ; cependant les valeurs critiques associées à deux points critiques de même indice d'un chemin générique de fonctions  $(h_t)_{t \in [0,1]}$  se croisent une quantité finie de fois, rien n'assure la continuité de la famille des selles connectantes  $D_t, t \in ]t'_0, t'_1[$  par rapport au temps comme le montre la figure 3.5 : deux selles connectantes  $D_\tau^1, D_\tau^2$  peuvent rentrer en compétition à un instant  $t = \tau$  de croisement des niveaux critiques.

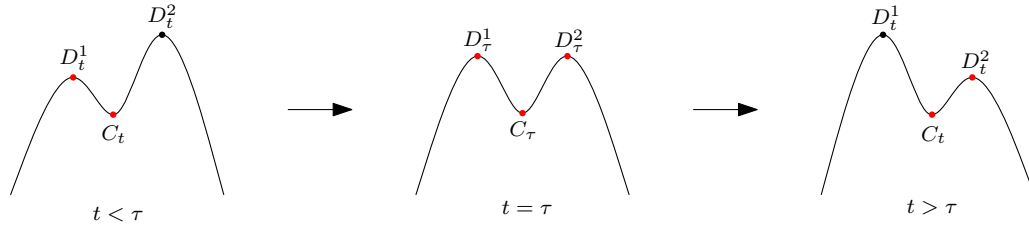


FIGURE 3.5 – Graphes à trois instants d'une famille générique  $h_t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ .

Soient  $(\tau_j)_{j=1}^r \subset ]t'_0, t'_1[$  les instants où  $(C_t)$  admet deux selles connectantes. Posons  $L > \max_{t \in [t'_0, t'_1]} h_t(D_t) - h_t(C_t) > 0$ , et prenons un équipement  $L$ -transverse  $(\xi'_t)_{t \in [0,1]}$  pour  $(\alpha'_t, B'_t)_{t \in [0,1]}$ . On remarque que pour les temps  $t$  dans un intervalle de  $\Delta := ]t'_0, t'_1[ \setminus (\tau_j)_{j=1}^r$  on peut suivre continûment la selle connectante  $(D_t)$  et pas seulement son niveau. On peut ainsi appliquer le lemme 3.1.9 dans n'importe quel sous-intervalle de  $\Delta$ .

Étudions la situation aux instants singuliers  $\{t'_0, \tau_1, \dots, \tau_r, t'_1\}$ . Pour des temps  $t > t'_0$  assez proches, la selle connectante est donnée par le relevé  $D_t \in B_t$  : ceci résulte du fait qu'il existe  $\varepsilon > 0$  assez petit tel que  $(\alpha'_t)_{t \in [t'_0 - \varepsilon, t'_0 + \varepsilon]}$  est un chemin de naissance d'indice 0 centré en  $t'_0$ , grâce au théorème 2.2.12.

Il se peut que  $r = 0$  ; dans ce cas on peut suivre continûment une selle connectante  $D_t$  pour  $C_t$  tout le long de  $]t'_0, t'_1[$  et en particulier leurs brins se rencontrent en un même point critique d'élimination d'indice 0 noté  $E^1$ . Nous pouvons appliquer le lemme 3.1.9 à la famille  $(\alpha'_t)_{t \in [t'_0 + \varepsilon, t'_1 - \varepsilon]}$  et au couple cité  $(D_t, C_t)$  : on trouve ainsi une famille  $(\alpha''_t)_{t \in [0,1]}$  de mêmes

extrémités que l'originale et qui n'a varié que dans l'intervalle  $[t'_0 + \varepsilon, t'_1 - \varepsilon]$  et dont le graphique de Cerf-Novikov associé aux points critiques concernés a varié comme dans la figure 3.6. On remarque que l'équipement  $(\xi'_t)_{t \in [0,1]}$  est toujours  $L$ -transverse pour cette nouvelle famille.

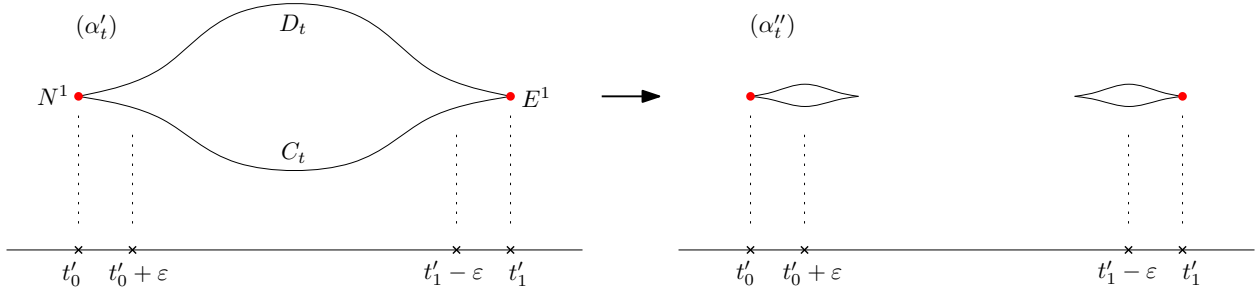


FIGURE 3.6 – Portions des graphiques de Cerf-Novikov concernant le brin de centres  $(C_t)$  avant et après appliquer le lemme 3.1.9 à la famille  $(\alpha'_t)_{t \in [t'_0 + \varepsilon, t'_1 - \varepsilon]}$ .

Les lèvres qui sont apparues sont triviales du fait que  $\alpha'_{t'_0 + \varepsilon}, \alpha'_{t'_1 - \varepsilon}$  étaient les extrémités respectives d'un modèle de naissance et d'un modèle d'élimination d'indice 0 : pour la lèvre à gauche on trouve un  $\delta > 0$  tel que pour tout  $t \in ]t'_0, t'_0 + 2\varepsilon[$  l'ensemble  $V_t$  des point d'adhérence de  $W^u(D_t) \cap h_t^{-1}([h(C_t) - \delta, +\infty[)$  ne rencontre  $\text{Crit}(h_t)$  qu'en  $D_t$  et  $C_t$ . La projection  $\pi$  est injective quand on la restreint à  $V_t$  et on peut prendre, pour tout  $t \in ]t'_0, t'_0 + 2\varepsilon[$ , des voisinages tubulaires  $U_t$  de  $V_t$  dans  $\widetilde{M}$  suffisamment où  $\pi$  reste injective tels que  $U_t \cap \text{Crit}(h_t) = \{D_t, C_t\}$ . On peut ainsi appliquer de manière  $\pi_1 M$ -équivariante le lemme [Lau1, Lemma 2.8] à la famille  $(h_t|_{U_t})_{t \in [t'_0 - \varepsilon, t'_0 + 3\varepsilon]}$ , dont la famille de primitives résultante  $(h_t^{(1)})_{t \in [t'_0 - \varepsilon, t'_0 + 3\varepsilon]}$  induit la famille des 1-formes  $(\alpha_t^{(1)})_{t \in [t'_0 - \varepsilon, t'_0 + 2\varepsilon]}$  que l'on cherchait dans l'intervalle  $[t'_0 - \varepsilon, t'_0 + 3\varepsilon]$ . On élimine de façon analogue la lèvre à droite, ce qui permet de conclure dans le cas  $r = 0$ .

Si  $r > 0$ , considérons  $\tau_1$  le premier instant où  $C_t$  présente deux selles connectantes. Notons par  $\tau_2$  le temps accidentel qui suit  $\tau_1$ , on a éventuellement  $\tau_2 = t'_1$ . Notons aussi  $D_t^1, t \in [t'_0, \tau_1]$  et  $D_t^2, t \in [\tau_1, \tau_2]$  les selles connectantes des  $(C_t), t \in [t'_0, \tau_2]$ . Prenons  $\varepsilon' > 0$  aussi petit que l'on veut. On peut supposer que  $t'_0 = \tau_1 - \varepsilon'$  quitte à utiliser le lemme 3.1.9 pour éliminer les couples  $(D_t^1, C_t)$  pour des temps  $t$  dans le sous-intervalle  $]t'_0 + 2\varepsilon', \tau_1 - \varepsilon'[$  de  $\Delta$  puis l'élimination de la lèvre triviale qui apparaît dans l'intervalle  $[t'_0, t'_0 + 2\varepsilon']$  d'une façon analogue à comment on a fait dans le cas  $r = 0$ . On produit l'élimination des couples  $(D_t^2, C_t)$  pour des temps  $t$  dans le sous-intervalle  $]\tau_1 + \varepsilon', \tau_2 - \varepsilon'[$  de  $\Delta$  de nouveau à l'aide du lemme 3.1.9. Les graphiques de Cerf-Novikov associés à la déformation décrite sont comme dans la figure 3.7.

Remarquons que le brin qui correspond aux selles connectantes  $D_t^2$  n'est pas forcément constitué des relevés  $B_t$  choisis ; on représente en conséquence ce brin en pointillé. On voit une queue d'aronde autour de  $t = \tau_1$ . On peut supposer que les séparatrices  $\ell_t^1, \ell_t^2$  de  $D_t^1, D_t^2$  qui ne tendent pas sur  $C_t$  descendent en dessous du niveau de  $C_t$  grâce à l'argument que nous avons déjà utilisé dans 3.1.8 : si  $\ell_t^1$  ne descend pas indéfiniment, alors elle tend vers un minimum  $C'_t$  ; mais si ce minimum est au dessus de  $C_t$ , on a montré qu'il ne peut pas être dans la  $\pi_1 M$ -orbite de  $C_t$  et on peut le faire descendre en dessous de  $C_t$ , et ce pour tout  $t \in ]\tau_1 - \varepsilon', \tau_1 + \varepsilon'[$ .

On peut ainsi trouver un  $\delta' > 0$  tel que l'adhérence de  $(W^u(D_t^1) \cup W^u(D_t^2)) \cap h^{-1}([h_t(C_t) - \delta', +\infty[)$  est un arc fermé que l'on note par  $I_t$  et qui est séparé en deux par  $C_t$ . On peut trouver

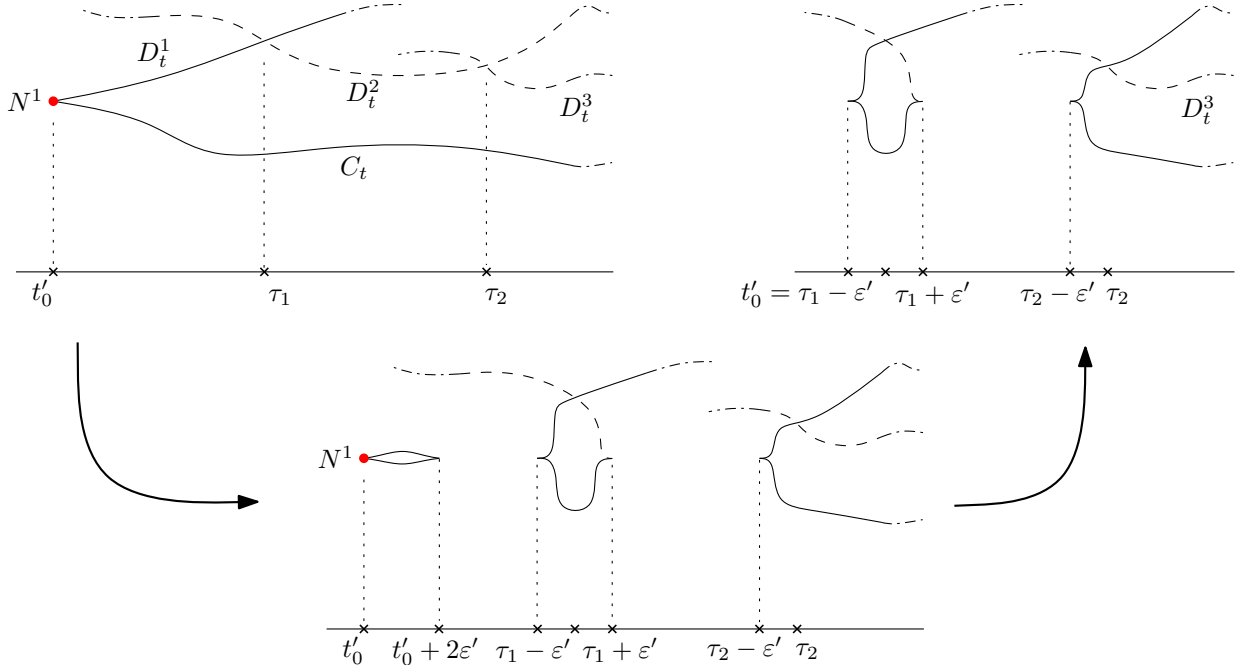


FIGURE 3.7 – Évolution des graphiques autour d'un premier temps  $t = \tau_1$  de compétition de selles connectantes lors des modifications décrites.

des voisinages tubulaires  $U_t$  des arcs  $I_t$  dans  $\widetilde{M}$  ne rencontrant  $\text{Crit}(h_t)$  qu'en les points concernés par la queue d'aronde et tels que la restriction de  $\pi$  à  $U_t$  est injective. Le lemme [Lau1, Lemma 2.6] s'applique à la famille  $(h_t|_{U_t})_{t \in [\tau_1 - \epsilon', \tau_1 + \epsilon']}$  de façon  $\pi_1 M$ -équivariante. La famille de 1-formes résultante ne présente plus le brin d'indice 0 correspondant aux  $C_t, t \in ]\tau_1 - \epsilon', \tau_1 + \epsilon[$ , et son graphique de Cerf-Novikov est comme dans 3.8.

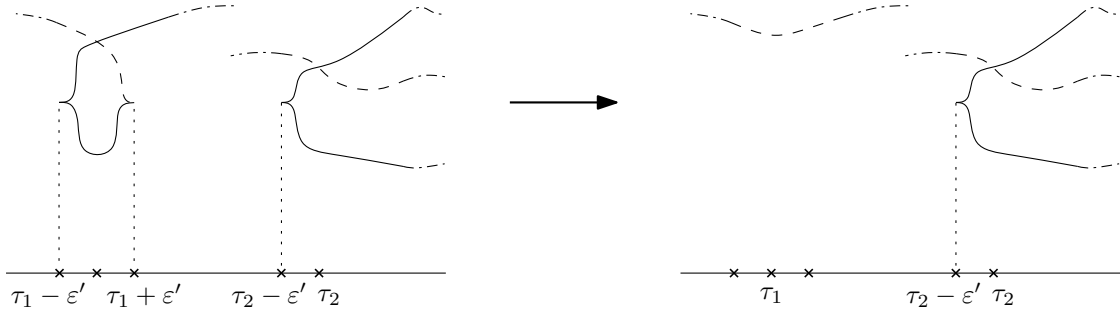


FIGURE 3.8 – Élimination d'une queue d'aronde descendante d'indice 0.

On trouve ainsi un chemin de 1-formes dans l'intervalle  $[t'_0 - \epsilon, \tau_1 + \epsilon]$  toujours avec  $s$  naissances d'indice 0 mais où  $r$  a diminué d'une unité. On se ramène ainsi à la situation  $r = 0$  qui a déjà été étudiée.

Une application répétée de ce procédé permet de conclure. Les centres d'indice  $n + 1$  s'éliminent d'une façon analogue à l'aide des versions correspondantes des lemmes 3.1.7, 3.1.8 et

3.1.9 (voir remarque 3.1.10).

□

### 3.1.3 $L$ -indépendance

Nous voulons « un bon comportement » des variétés invariantes aux instants de naissance et d'élimination. On veut que les variétés invariantes du zéro de naissance/élimination intersectent le moins possible une variété invariante quelconque. Pour ce faire, on introduit la  $L$ -indépendance ci-dessous.

**Définition 3.1.12.** Soit  $(\xi, B)$  un pseudo-gradient basé,  $P \in B$  et soit  $L \geq 0$ . On définit l'ensemble de  $L$ -dépendance de  $P$  par :

$$I_L(P) := \left\{ gQ \in (\pi_1 M \cdot B) \setminus \{P\} \mid \begin{array}{l} gQ \in \overline{W^u(P) \cup W^s(P)} \\ |u(g)| \leq L \end{array} \right\} \subseteq \widetilde{M}$$

On dit que  $P$  est  $L$ -indépendant si son ensemble de  $L$ -dépendance est vide. De même, on dit que  $p = \pi(P) \in Z(\xi)$  est  $L$ -indépendant si son relevé  $P$  l'est.

Pour mieux comprendre la notion de  $L$ -indépendance, on scinde la définition en deux parties :

**Définition 3.1.13.** Soit  $(\xi, B)$  un pseudo-gradient basé,  $P \in B$  et soit  $L \in \mathbb{R}$ . On définit l'ensemble de  $L^-$ -dépendance de  $P$  par :

$$I_L^-(P) := \left\{ gQ \in (\pi_1 M \cdot B) \setminus \{P\} \mid \begin{array}{l} gQ \in \overline{W^u(P)} \\ |u(g)| \leq L \end{array} \right\} \subseteq \widetilde{M}$$

ainsi que l'ensemble de  $L^+$ -dépendance de  $P$  par :

$$I_L^+(P) := \left\{ gQ \in (\pi_1 M \cdot B) \setminus \{P\} \mid \begin{array}{l} gQ \in \overline{W^s(P)} \\ |u(g)| \leq L \end{array} \right\} \subseteq \widetilde{M}$$

On dit que  $P$ , est  $L^\pm$ -indépendant si son ensemble de  $L^\pm$ -dépendance est vide. On dira pareil du zéro  $p = \pi(P)$ .

La notion de  $L$ -indépendance pour  $p$ , un zéro d'une 1-forme, dépend du choix des relevés  $B$ . On veut que cette notion décrive la situation où il n'y a pas de liaison « courte » qui arrive à ou part de  $p$ . Plus précisément qu'il n'y ait pas de liaison concernée avec  $p$  de  $u$ -enroulement supérieur à  $-L$ . Cependant si on prend un  $L$  trop petit par rapport à la taille, on peut se trouver avec la situation décrite dans la figure 3.9, où  $B = \{P, Q\}$  désignent les relevés de deux zéros d'indice consécutif de  $\alpha$ , et  $\xi$  est un pseudo-gradient Morse-Smale pour  $\alpha$ .

Pour le  $L > 0$  choisi,  $P$  est  $L$ -indépendant, ce qui n'empêche pas la présence de la liaison courte  $\ell$ . Ceci se règle on considérant des longueurs  $L$  au moins aussi grandes que la taille associée au choix des relevés  $B$  :

**Lemme 3.1.14.** Soit  $P \in B$  et notons  $p = \pi(P)$ . Si  $L \geq T_B$ , où  $T_B$  désigne la taille associée aux relevés  $B$ , nous avons que  $p$  est respectivement

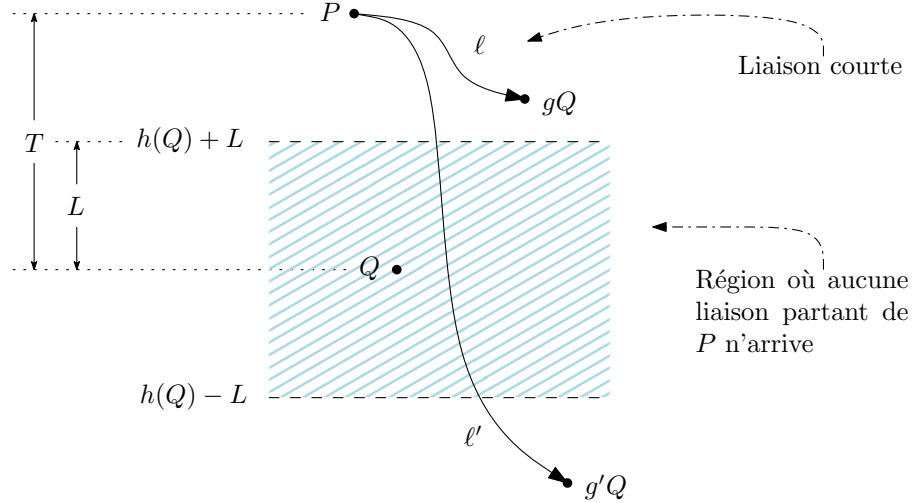


FIGURE 3.9 – Situation où  $P$  est  $L$ -indépendant, où  $L$  est inférieur à la taille  $T$ .

1.  $L^-$ -indépendant si et seulement s'il n'y a aucune liaison qui part de  $p$  de  $u$ -enroulement supérieur à  $-L$ .
2.  $L^+$ -indépendant si et seulement s'il n'y a aucune liaison qui arrive à  $p$  de  $u$ -enroulement supérieur à  $-L$ .
3.  $L$ -indépendant si et seulement s'il n'y a aucune liaison concernée avec  $p$  de  $u$ -enroulement supérieur à  $-L$ .

*Démonstration.* Il est clair qu'un zéro est  $L$ -indépendant si et seulement s'il est  $(L^+, L^-)$ -indépendant. Supposons que  $p$  est  $L^-$ -indépendant et considérons une liaison  $\ell \in \mathcal{L}(p, q)$ . L'enroulement  $g$  de  $\ell$  vérifie ainsi  $|u(g)| > L$ . Mais  $u(g) > L$  est impossible car dans ce cas on aurait

$$0 < L(\ell) = h(P) - h(Q) - u(g) < T - L \leq 0.$$

On déduit alors que  $u(g) < -L$ , et ce pour l'enroulement de toute liaison qui part de  $P$ . La  $L^+$ -indépendance se traite de la même façon.  $\square$

**Remarque 3.1.15.** Une condition géométrique équivalente, mais moins ad hoc pour que  $P$  soit  $L^-$ -indépendant quand  $L \geq T$  est que la variété instable tronquée  $W_{L_p, B}^u(p)$  soit un disque fermé et plongé dans  $M$ , où  $L_{p, B} := \min_{Q \in B} h(P) - h(Q) + L$  : seulement une liaison  $\ell$  partant de  $p$  peut faire qu'une troncature  $W_H^u(p)$  de la variété instable de  $p$  ne soit pas un disque plongé, mais une telle liaison a longueur  $L(\ell) = h(P) - h(Q) - u(g) > h(P) - h(Q) + L$ , la dernière inégalité grâce au lemme 3.1.14. On sait ainsi que la troncature  $W_H^u(p)$  est un disque fermé et plongé dans  $M$ , où  $H$  est la plus petite des valeurs  $h(P) - h(Q) + L$  quand  $Q \in B$ .

Voyons que nous pouvons rendre  $L$ -indépendants les zéros de naissance des chemins génériques de 1-formes  $L$ -équipées :

**Lemme 3.1.16.** Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0, 1]}$  une famille générique à un paramètre, ne contenant qu'une 1-forme de type naissance en  $t = \frac{1}{2}$ , munie d'un équipement  $L$ -transverse  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0, 1]}$  au sens



de la définition 2.2.31. Notons par  $b_{\frac{1}{2}}$  le zéro de naissance.

On suppose que  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est sans centres ; alors il existe un équipement  $L$ -transverse  $(\tilde{\xi}_t, \tilde{B}_t)_{t \in [0,1]}$  vérifiant :

1.  $B_\bullet = \tilde{B}_\bullet$  ;
2.  $\tilde{\xi}_\bullet$  est  $C^0$ -proche de  $\xi_\bullet$  ;
3. Le zéro de naissance  $b_{\frac{1}{2}} \in Z(\alpha_{\frac{1}{2}})$  est  $L$ -indépendant pour  $\tilde{\xi}_{\frac{1}{2}}$ .

*Démonstration.* Remarquons d'abord que si  $q$  désigne un zéro de Morse de  $\alpha_t, t \in [0, 1]$  quelconque, on a  $\text{ind}(q) \neq 0, n+1$  du fait que  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est sans centres. Nécessairement  $\text{ind}(b_{\frac{1}{2}}) \neq 0, n$ . On ne se soucie que de la  $L^-$ -indépendance. Appelons  $B \in B_{\frac{1}{2}}$  le relevé de  $b_{\frac{1}{2}}$ . On aurait fini si l'ensemble de  $L^-$ -dépendance de  $B$  était vide, autrement dit si  $W^u(B) \cap W^s(gQ) = \emptyset$  pour tout  $Q \in B_{\frac{1}{2}}$  et  $g \in \pi_1 M$  tel que  $u(g) \geq -L$ , à exception du couple  $Q = B, g = 1$ . En principe la  $L$ -transversalité nous dit seulement que ces intersections sont transverses et éventuellement non-vides pour un nombre fini de tels  $g \in \pi_1 M$ .

Notons  $i := \text{ind}(B)$  et  $j := \text{ind}(P)$ . Dans tous les cas  $W^s(gQ)$  est de codimension  $j$ , même si  $Q = B$  qui n'est pas de Morse. La dimension de la variété instable  $W^u(B)$  est  $i + 1$ . Ainsi si  $j > i + 1$ , ces variétés ont intersection vide, ce qui arrive aussi quand  $j = i + 1$ , puisqu'elles devraient se rencontrer dans une variété de dimension 0, mais en tant qu'espaces de trajectoires, leur dimension doit être au moins 1. Nous pouvons ainsi ignorer les  $Q \in B_{\frac{1}{2}}$  tels que  $j > i$ .

Notons par  $I_L^-(B)$  l'ensemble de  $L^-$ -dépendance de  $B$  associé au champ  $\xi_{\frac{1}{2}}$  dans le sens de 3.1.13. Du fait que l'action de  $\pi_1 M$  sur le revêtement universel est totalement discontinue, on trouve un voisinage ouvert  $\tilde{U}$  de  $B$  tel que  $\tilde{U} \cap (\pi_1 M \cdot \{B\}) = \{B\}$ , en particulier on a  $\tilde{U} \cap I_L^-(B) = \emptyset$  ; on peut aussi exiger que  $\tilde{U} \cap g\tilde{U} = \emptyset$  pour tout  $g \neq 1 \in \pi_1 M$ . Ainsi, la transformation que nous allons décrire dans  $\tilde{U}$  se projette bien dans  $U := \pi(\tilde{U}) \subseteq M$  par  $\pi_1 M$ -invariance. Par le théorème 2.2.12, il existe un  $\varepsilon' > 0$  assez petit tel que  $(\alpha_t)_{t \in [\frac{1}{2}-\varepsilon', \frac{1}{2}+\varepsilon']}$  est un chemin de naissance modelé par le chemin des cylindres  $(C_t)_{t \in [\frac{1}{2}-\varepsilon', \frac{1}{2}+\varepsilon]}$  que nous pouvons supposer contenus dans  $\tilde{U}$ . Quitte à faire un autre choix de primitives, qui ne différerait que d'une constante additive  $c_t$  pour chaque  $t \in [0, 1]$ , on peut supposer que  $h_{\frac{1}{2}}(B) = 0$ . Toujours en se focalisant sur le temps de naissance  $t = \frac{1}{2}$ , on appelle  $L_s := \tilde{U} \cap h_{\frac{1}{2}}^{-1}(s)$ .

En étudiant la façon dont les pseudo-gradients adaptés varient autour d'un chemin de naissance, on sait que  $W^u(B)$  coupe  $L_s$  dans un disque fermé  $D_s^i$  de dimension  $i$  pour tout  $s < 0$  assez proche. Considérons le  $(i + 1)$ -cylindre feuilleté par des disques  $(D, \mathcal{D})$  suivant :

$$D := h_{\frac{1}{2}}^{-1} \left( \left[ -\varepsilon, -\frac{\varepsilon}{2} \right] \right) \cap W^u(B), \quad \mathcal{D} = \{D_s^i\}_{s \in [-\varepsilon, -\frac{\varepsilon}{2}]}$$

Prenons un voisinage cylindrique compact de  $D$  dans  $h_{\frac{1}{2}}^{-1} \left( \left[ -\varepsilon, -\frac{\varepsilon}{2} \right] \right) \cap U$ , que l'on nomme  $K$  et que l'on munit du feuilletage par des  $n$ -disques  $\mathcal{K} = \{K_s\}$  induit par les niveaux de  $h_{\frac{1}{2}}$ . Clairement  $D_s^i \subset K_s$ . Notons  $D^\pm, K^\pm$  respectivement les disques supérieurs/inférieurs. Concentrons l'attention sur le disque  $D^-$ . Comme  $\xi_{\frac{1}{2}}$  est  $L$ -transverse, chaque  $gQ \in I_L^-(B)$



détermine une sous-variété  $S_{gQ}$  de codimension  $j$  dans le disque  $D^-$  donnée par  $S_{gQ} := W^u(B) \cap W^s(gQ) \cap L_{-\varepsilon}$ . On note leur réunion par

$$S := \bigcup_{gQ \in I_L^-(B)} S_{gQ} \hookrightarrow D^-$$

L'idée est de « faire fuir  $S$  par le bord de  $D^-$  » : le flot du champ détermine un difféomorphisme, que l'on appelle *entrée-sortie*

$$\Psi_{\xi_{\frac{1}{2}}} : K^+ \rightarrow K^-$$

On modifie le champ de vecteurs  $\xi_{\frac{1}{2}}$  dans  $K$  de façon que l'on obtient un champ de vecteurs  $\tilde{\xi}$  sur  $M$  dont l'entrée-sortie vérifie  $\Psi_{\tilde{\xi}}(D^+) \cap S = \emptyset$ . On aura ainsi disjoint la variété instable de  $B$  des variétés stables qu'elle rencontrait.

Grâce aux hypothèses, on a  $j = \text{ind}(gQ) > 0$ , et la codimension de  $S$  est *strictement* positive dans  $D^-$ . En particulier, on peut choisir un point  $x \in D^- \setminus \bar{S}$ , ainsi qu'un disque fermé  $\Delta$  de dimension  $i$  contenant  $x$  et contenu dans  $D^- \setminus \bar{S}$ . Appelons  $\gamma$  la trajectoire de  $\xi_{\frac{1}{2}}$  passant par  $x$ . Elle détermine un point  $x_s$  sur chaque feuille  $D_s$  de  $D$ .

Prenons une fois pour toutes, un difféomorphisme  $\varphi : (D^+, x_+) \rightarrow (\mathbb{D}^i, 0)$ , où  $\mathbb{D}^i$  désigne le disque unité de  $\mathbb{R}^i$ . Le flot détermine aussi des difféomorphismes pour chaque feuille  $\varphi_s : (D_s^i, x_s) \rightarrow (\mathbb{D}^i, 0)$ .

On considère l'homothétie du disque de rapport  $s$  :

$$\begin{aligned} \rho_s : \mathbb{D}^i &\longrightarrow \mathbb{D}^i \\ y &\longmapsto sy \end{aligned}$$

et on prend  $\lambda \in \mathcal{C}^\infty([-\varepsilon, -\frac{\varepsilon}{2}], \mathbb{R})$  de graphe comme dans la figure 3.10, où  $r$  désigne la distance de  $x$  au bord de  $\Delta$ . Plus précisément  
 $r := \min \{ \|\varphi_{-\varepsilon}(p)\| \mid p \in \partial\Delta \} > 0$  et  $0 < r' < r$ .

On définit une contraction du cylindre  $D$  qui en particulier respecte les niveaux

$$\begin{aligned} c : D &\longrightarrow D \\ (p, s) &\longmapsto \varphi_s^{-1}(\rho_{\lambda(s)}(\varphi_s(p)), s) \end{aligned}$$

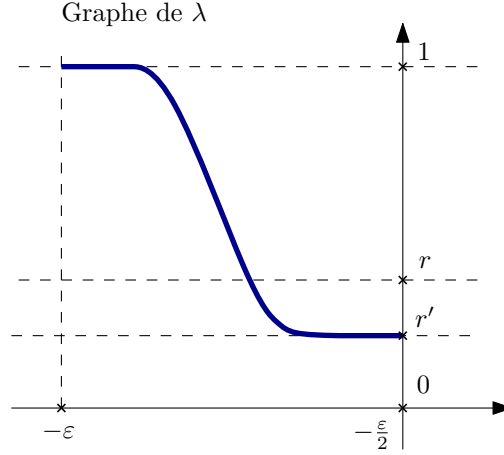
L'effet de la contraction est représenté schématiquement dans la figure 3.11.

On obtient un champ  $\xi' := c_*(\xi_{\frac{1}{2}})$  sur  $\text{Im}(c)$ . Nous remarquons que  $\xi'$  est toujours adapté à  $\alpha_{\frac{1}{2}}$  et coïncide avec  $\xi_{\frac{1}{2}}$  dans un voisinage dans  $c(D)$  de  $D^+ \cup (D^- \cap c(D))$  dû au fait que la contraction préserve la composante transverse au feuilletage du champ de vecteurs<sup>1</sup> et que  $\lambda$  est constante au voisinage de  $\{-\varepsilon, -\frac{\varepsilon}{2}\}$ . On étend  $\xi'$  en un pseudo-gradient de  $\alpha_{\frac{1}{2}}$  sur un petit voisinage de  $K$  de sorte qu'il coïncide avec  $\xi$  dans un voisinage de sécurité dans  $K$  de  $K^+ \cup K^-$  que l'on appelle *Sec*.

Soit  $\omega \in \mathcal{C}^\infty(M)$  fonction cloche telle que

---

1.  $c_*(-\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}) = -\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$

FIGURE 3.10 – Graphe de  $\lambda$ 

a)  $\omega|_{\pi(C)} \equiv 1$

b)  $\text{supp}(\omega)$  est disjoint d'un voisinage de  $\pi(\partial^{\text{lat}} K)$  où  $\partial^{\text{lat}} K := \overline{\partial K \setminus (K^+ \cup K^-)}$

Prenons  $V$  un voisinage de  $M \setminus \text{int}(\pi(K))$  vérifiant  $V \cap \text{supp}(\omega) \subset \pi(\text{Sec})$ . Avec ces choix, la formule suivante définit un champ de vecteurs sur  $M$  :

$$\tilde{\xi} := \begin{cases} \xi_{\frac{1}{2}} & \text{sur } V \\ (1 - \omega) \cdot \xi_{\frac{1}{2}} + w \cdot \xi' & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Ce champ de vecteurs est toujours adapté à  $\alpha_{\frac{1}{2}}$  parce que l'espace de pseudo-gradients d'une 1-forme est convexe. De plus  $\tilde{\xi}$  est  $\mathcal{C}^0$ -proche de  $\xi_{\frac{1}{2}}$ , et  $B$  est  $L^-$ -indépendant pour  $\tilde{\xi}$ . Ce faisant, on a pu perdre la propriété de  $L$ -transversalité. Cependant, comme la  $L^-$ -indépendance est clairement  $\mathcal{C}^0$ -ouverte, il suffit se placer dans un  $\mathcal{C}^0$ -voisinage  $\mathcal{W}$  de  $\tilde{\xi}$  de champs  $L^-$ -indépendants et en utilisant le fait que la propriété d'être  $L$ -transverse est générique, on trouve le  $\tilde{\xi}_{\frac{1}{2}} \in G_L^0(\alpha_{\frac{1}{2}})$

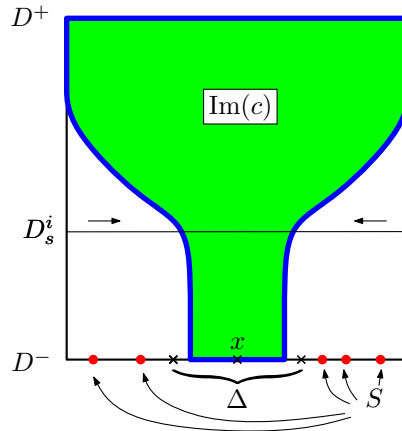


FIGURE 3.11 – Effet de la contraction

cherché.

Reste à trouver la famille  $\tilde{\xi}_t$  pour le reste des temps. Pour des temps proches de  $\frac{1}{2}$ , on trouve  $D$  en considérant la portion des trajectoires de  $\xi_t$  dans  $K$  qui commencent en  $D^+$ . Ainsi, il existe un  $\delta > 0$  tel que les champs définis par  $\xi'_t := c_*(\xi_t)$  sur  $\text{Im}(c) \subseteq D$  ont toujours un sens pour  $t \in [\frac{1}{2} - 2\delta, \frac{1}{2} + 2\delta]$  et y vérifient toujours la condition d'être pseudo-gradients pour  $\alpha_t$ . On peut les étendre sur  $M$  à une famille  $(\tilde{\xi}_t)_{t \in [\frac{1}{2} - 2\delta, \frac{1}{2} + 2\delta]}$  adaptée à  $(\alpha_t)_{t \in [\frac{1}{2} - 2\delta, \frac{1}{2} + 2\delta]}$  comme précédemment.

Prenons une fonction cloche  $\mu \in \mathcal{C}^\infty([\frac{1}{2} - 2\delta, \frac{1}{2} + 2\delta], \mathbb{R})$  constante et égale à 1 sur  $[\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2} + \delta]$  comme celle de la figure 3.12.

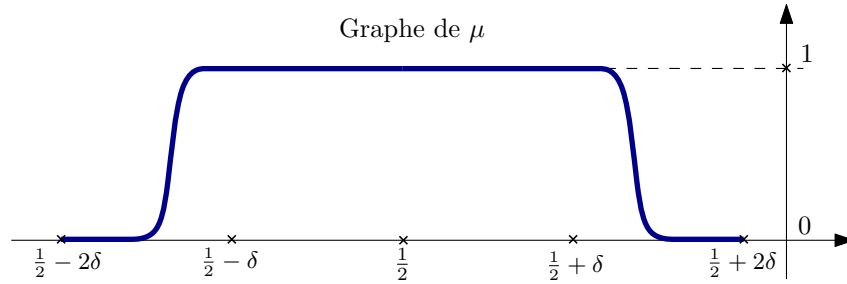


FIGURE 3.12 – Fonction cloche

Du fait que l'espace  $\mathcal{G}(\alpha_t)$  est convexe pour tout temps  $t$ , la famille de champs de vecteurs ci-dessous est toujours adaptée à la famille de 1-formes :

$$\tilde{\xi}_t := \begin{cases} \xi_t, & \text{si } t \notin [\frac{1}{2} - 2\delta, \frac{1}{2} + 2\delta] \\ \mu(t) \cdot \xi'_t + (1 - \mu(t)) \cdot \xi_t, & \text{si } t \in [\frac{1}{2} - 2\delta, \frac{1}{2} + 2\delta] \end{cases}$$

Comme on n'a pas changé l'ensemble des zéros des champs, on peut prendre  $\tilde{B}_t = B_t$  pour tout  $t \in [0, 1]$  et on obtient une famille d'équipements pour lequel le zéro de naissance est  $L$ -indépendant. Il suffit maintenant d'approcher  $(\tilde{\xi}_t, \tilde{B}_t)_{t \in [0, 1]}$  par un autre équipement  $L$ -transverse et de remarquer que la  $L$ -indépendance est  $\mathcal{C}^0$ -ouverte aussi à paramètre pour obtenir un équipement  $L$ -transverse où  $b_{\frac{1}{2}}$  est  $L^-$ -indépendant pour  $\tilde{\xi}_{\frac{1}{2}}$ .

On fait un raisonnement analogue pour obtenir la  $L^+$ -indépendance, en prenant soin de se placer préalablement sur un  $\mathcal{C}^0$ -voisinage de  $\tilde{\xi}_{\frac{1}{2}}$  constitué des champs  $L^-$ -indépendants pour ne pas perdre cette propriété lors de la deuxième modification.  $\square$

**Remarque 3.1.17.** L'énoncé du lemme 3.1.16 qui résulte de remplacer « naissance » par « élimination » admet une preuve analogue.

**Remarque 3.1.18.** Appelons  $\partial^{\text{lat}} D := \overline{\partial D} \setminus \overline{(D^+ \cup D^-)}$  où  $D$  est comme dans le contexte de la preuve de 3.1.16. En étudiant la façon dont les pseudo-gradients adaptés varient autour d'un chemin de naissance, on sait que pour des temps assez proches  $t > \frac{1}{2}$  les relevés des zéros issus de la naissance  $\{P_t, Q_t\}$  d'indices respectifs  $i + 1, i$  vérifient

1.  $D \subseteq W^u(P_t) \cup W^u(Q_t)$

2. Plus précisément,  $D \cap W^u(Q_t) = \partial^{\text{lat}} D$ .

Notons par

$$I_L^j(B) := \{gQ \in I_L(B) \mid \text{ind}(Q) = j\}$$

Par construction, il existe un  $\delta' > 0$  tel que la famille  $(\tilde{\xi}_t, B_t)_{t \in ]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta'[}$  traverse de façon transverse la strate  $G_L^1$  au moins

$$\sum_{gQ \in I_L^i(B)} \text{mult}(gQ) + \sum_{gQ \in I_L^{(i+1)}(B)} \text{mult}(gQ)$$

fois. La première somme correspond à la modification qui rend le point  $L^-$ -indépendant et  $\text{mult}$  désigne le nombre fini d'intersections dans un niveau intermédiaire  $L$  des variétés correspondantes :

$$\text{mult}(gQ) := \begin{cases} \#(W^u(B) \cap W^s(gQ) \cap L) & \text{si } \text{ind}(Q) = i \\ \#(W^u(gQ) \cap W^s(B) \cap L) & \text{si } \text{ind}(Q) = i + 1 \end{cases}$$

### 3.1.4 Mise en évolution $L$ -normale

Une fois que nous avons introduit la notion de  $L$ -indépendance, on peut produire une version raffinée du lemme 3.1.3 pour les chemins génériques basés qui n'ont pas de centre. Il concerne le choix d'équipement.

**Définition 3.1.19.** Une famille à un paramètre de 1-formes basées  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  est dite d'évolution  $L$ -normale si :

1. la famille  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est d'évolution normale,
2. il existe un chemin de champs de vecteurs  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$  tel que la famille  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  est un équipement  $L$ -transverse de  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  vérifiant les conditions suivantes :
  - a) toute naissance et élimination est  $L$ -indépendante et
  - b) toute liaison  $L$ -élémentaire a lieu dans l'intervalle de Morse.

Pour une telle famille, si  $R$  désigne l'ensemble des temps avec une liaison  $L$ -élémentaire, l'intervalle  $] \max(R), t_E[$  est appelé l'intervalle des pré-éliminations. Les matrices de  $L$ -incidence ne varient pas dans cette intervalle ; on les appelle matrices de pré-élimination.

**Proposition 3.1.20.** Soit  $L \geq 0$ . Alors, tout chemin de 1-formes basées  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  à extrémités non-singulières où  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est d'évolution normale et sans centres<sup>2</sup>, se déforme à extrémités fixes en un autre  $(\beta_t, \tilde{B}_t)_{t \in [0,1]}$  toujours sans centres et tel que :

1. le chemin  $(\beta_t, \tilde{B}_t)_{t \in [0,1]}$  est d'évolution  $L$ -normale et
2. les tailles associées vérifient  $T_{B_\bullet} = T_{\tilde{B}_\bullet}$ .

---

2. En particulier, il n'y a pas des zéros de naissance d'indices 0 ou  $n$ .

*Démonstration.* Munissons  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  d'un équipement  $L$ -transverse  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  compatible avec les relevés donnés. Appelons respectivement  $N = \{t_1 < \dots < t_s = t_N\}$  et  $R$  les ensembles des instants de naissance et de liaison  $L$ -élémentaire. En particulier on voudrait avoir  $t_N < \min R$ . Il est clair que  $t_1 < \min R$  vu qu'il ne peut pas y avoir de liaison s'il n'y a pas de point critique. On applique le lemme 3.1.16 à  $(\alpha_t)_{t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]}$ . On obtient ainsi un équipement  $L$ -transverse  $(\tilde{\xi}_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  de mêmes zéros que le précédent et où la naissance en temps  $t_1$  est  $L$ -indépendante. Des nouvelles liaisons  $L$ -élémentaires ont pu apparaître pour des temps  $t > t_1$  (comme explique la remarque 3.1.18), mais on note l'ensemble des temps de glissement toujours par  $R$ . On explique maintenant un procédé semblable à celui du lemme 3.1.3, dont l'effet est de produire une famille  $(\alpha'_t, B'_t)_{t \in [0,1]}$  de mêmes extrémités munie d'un équipement  $(\xi'_t)_{t \in [0,1]}$ , dont le nouvel ensemble des temps de glissement est noté par  $R'$ , qui vérifie :

- la deuxième naissance de  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  a lieu en un temps  $t_0 < \min R'$  et est devenue  $L$ -indépendante,
- le cardinal, temps et nature des autres naissances et éliminations n'ont pas changé et
- les tailles  $T_{B_\bullet}$  et  $T_{B'_\bullet}$  coïncident.

Notons  $T := \max_{0 \leq t \leq 1} T_{B_t}$  la taille du chemin donné. Prenons aussi les niveaux  $A_t, Z_t$  de  $h_t$  où se trouvent les relevés qui réalisent la taille à l'instant  $t$ ; on a ainsi  $T_{B_t} = h_t(Z_t) - h_t(A_t)$  pour tout  $t$  où  $Z(\alpha_t) \neq \emptyset$ . Considérons les niveaux

$$A_t^- := h_t^{-1}(h_t(Z_t) - T) \quad \text{et} \quad Z_t^+ := h_t^{-1}(h_t(A_t) + T).$$

Il est clair que  $h_t(A_t^-) < h_t(A_t) < h_t(Z_t) < h_t(Z_t^+)$  pour tout  $t$  où  $Z(\alpha_t) \neq \emptyset$  par la définition de taille d'un chemin. On appelle  $\widetilde{M}_t$  les troncatures du revêtement données par les points strictement compris entre les niveaux  $A_t^-$  et  $Z_t^+$ . Prenons enfin un temps  $t_0 \in ]t_1, \min(R \cup \{t_2\})[$  quelconque. Avec les notations de 3.1.3, on construit un chemin

$$\begin{array}{ccc} \gamma : & [t_0 - \varepsilon, t_2 - \varepsilon] & \longrightarrow \quad \left( [0, 1] \times \widetilde{M} \right) \setminus \mathcal{T} \\ & t & \longmapsto \quad (t, x_t) \end{array}$$

qui de plus vérifie  $x_t \in \widetilde{M}_t$  pour tout  $t \in [t_0 - \varepsilon, t_2 - \varepsilon]$ .

Prenons  $(C_t)_{t \in [t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon]}$  un chemin de cylindres modelant le chemin de naissance  $(\alpha_t)_{t \in [t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon]}$  où  $C_{t_2}$  contient le relevé  $B_{t_2}^2$  de la naissance de temps  $t_2$ . En particulier on a que  $h_{t_2}(A_{t_2}^-) \leq h_{t_2}(B_{t_2}^2) \leq h_{t_2}(Z_{t_2}^+)$  et on peut choisir un  $x_{t_2 - \varepsilon} \in C_{t_2 - \varepsilon}$  vérifiant la condition ouverte  $h_{t_2 - \varepsilon}(A_{t_2 - \varepsilon}^-) < h_{t_2 - \varepsilon}(x_{t_2 - \varepsilon}) < h_{t_2 - \varepsilon}(Z_{t_2 - \varepsilon}^+)$  par continuité. Le point  $x_{t_2 - \varepsilon}$  est ainsi un point régulier de  $h_{t_2 - \varepsilon}$  et est dans  $\widetilde{M}_{t_2 - \varepsilon}$ . La condition sur la hauteur que nous avons demandé à  $x_{t_2}$  étant ouverte, on trouve des points la vérifiant dans un voisinage de  $x_{t_2}$  pour des  $t$  assez proches. Il est facile de rendre la condition aussi fermée en prenant un couple des niveaux plus proches. On peut construire un  $\gamma : [t_0 - \varepsilon, t_2 - \varepsilon] \rightarrow \left( [0, 1] \times \widetilde{M} \right)$  vérifiant la condition sur la hauteur des  $x_t$ . Grâce au fait que  $\dim(M) > 1$ , on peut appliquer le même argument qui permettait de trouver le chemin  $\gamma$  dont la coordonnée  $x_t$  dans  $\widetilde{M}$  est un point régulier de  $h_t$ .

Ensuite, nous appliquons le lemme de mise en évolution normale 3.1.3 pour ramener la naissance qui avait lieu en  $t_2$  à  $t_0$  : on a produit une famille  $(\alpha'_t, B'_t, \xi'_t)_{t \in [0,1]}$ , où les champs sont transportés par la famille de difféomorphismes sous-jacente à la transformation (voir le théorème

2.2.13). Les cylindres qui modèlent la construction peuvent être choisis aussi petits pour que l'on ait  $C_{t-\varepsilon,s} \subseteq \widehat{M}_t$  pour tout  $(t,s) \in [t_0, t_2] \times [0, 2\varepsilon]$  : ceci est possible grâce à la condition que nous avons imposée aux  $x_t$ . La taille n'est donc pas modifiée par cette opération.

Reste à rendre  $L$ -indépendante la deuxième naissance, qui a lieu maintenant en  $t_0$ . Si on applique bêtement le lemme 3.1.16, on peut introduire des liaisons avant  $t_0$ , dû à la présence des zéros pour des temps  $t < t_0$ . Il suffit d'être un peu plus soigneux au moment de construire le chemin  $\gamma$  : modifions légèrement la position du point  $x_{t_0-\varepsilon}$  pour éviter d'introduire des liaisons lors de l'opération de mise en  $L$ -indépendance de la naissance en  $t_0$ .

On prend le niveau  $L$  contenant le point  $x_{t_0-\varepsilon}$ . L'ensemble suivant est appelé *de sécurité* :

$$\Delta := \bigcup_{|u(g)| \leq L} W^u(gP_{t_0-\varepsilon}^1) \cup W^s(gQ_{t_0-\varepsilon}^1).$$

Vu qu'il n'y a pas de centre, on sait que  $\Delta$  est de codimension strictement positive dans  $L$  : on aurait pu ainsi choisir le point régulier  $x_{t_0-\varepsilon}$  de sorte que  $x_{t_0-\varepsilon} \notin \Delta$ . Les cylindres  $(C_{t_0-\varepsilon,s})_{s \in [0, 2\varepsilon]}$  associés à ce temps peuvent aussi être pris de sorte que  $C_{t_0-\varepsilon,s} \cap \Delta = \emptyset$ . On applique le lemme 3.1.16 à la famille  $(\alpha'_t, B'_t, \xi'_t)_{t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$  ce qui rend  $L$ -indépendante la naissance en  $t_0$ . La déformation du lemme 3.1.16 qui fait fuir les liaisons par le bord ne peut pas créer de nouvelle liaison entre les variétés invariantes qui existaient pour des temps  $t < t_0$  vu que la propriété  $C_{t_0-\varepsilon,s} \cap \Delta = \emptyset$  pour tout  $s \in [0, \varepsilon]$  dit que nous avons éloigné le support de la déformation de l'ensemble de sécurité, et donc des dites variétés. La figure 3.13 décrit schématiquement la transformation.

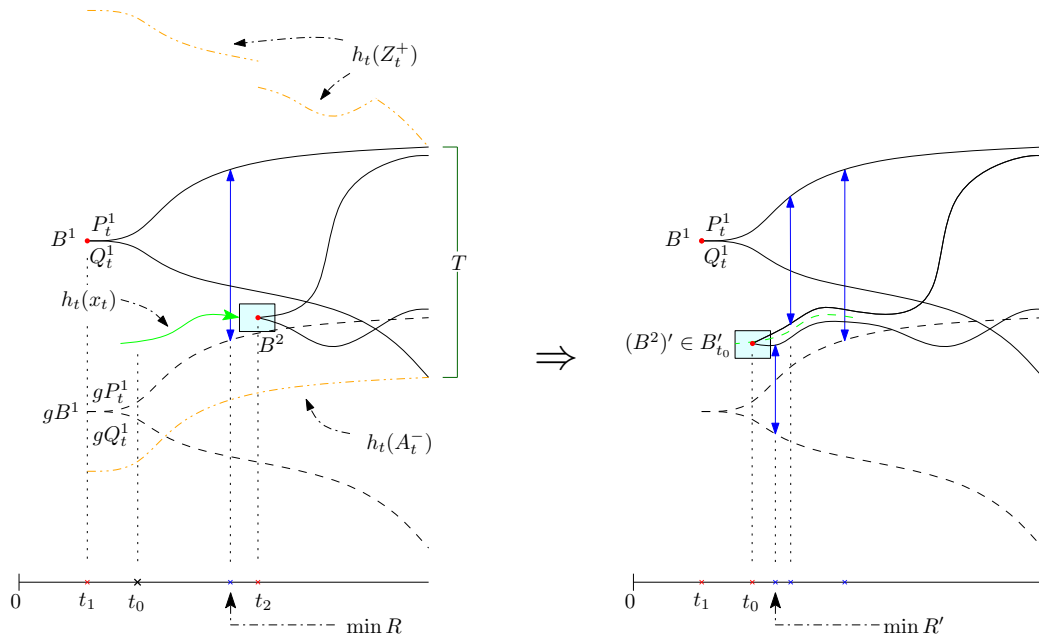


FIGURE 3.13 – Graphique de Cerf-Novikov avant/apres appliquer le procédé de mise en évolution  $L$ -normale à la deuxième naissance

Il suffit d'itérer ce procédé à chaque naissance pour obtenir une famille  $(\alpha'_t, B'_t)_{t \in [0,1]}$  de mêmes extrémités, même taille munie d'un équipement  $(\xi'_t)_{t \in [0,1]}$  pour lequel :

- toute naissance est  $L$ -indépendante et
- tout temps de glissement arrive après tout temps de naissance.

En appliquant un procédé analogue pour les éliminations, on aboutit à un chemin  $(\beta_t, \tilde{B}_t)_{t \in [0,1]}$  muni d'un équipement compatible  $(\tilde{\xi}_t)_{t \in [0,1]}$  pour lequel il est d'évolution  $L$ -normale.  $\square$

### 3.1.5 Application du lemme des longueurs pour les chemins à deux indices

Nous utilisons le résultat technique principal de la section 1.1 dans un contexte géométrique. Nous en déduisons le *lemme du déterminant abélianisé* ci-dessous.

**Lemme 3.1.21** (Du déterminant abélianisé). *Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  une famille de formes de Morse, à deux indices  $i$  et  $i+1$  et munie d'un choix de relevés  $B$ . Appelons  $T$  sa taille et  $s$  le nombre de couples de zéros à n'importe quel instant.*

*On équipe  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  d'une famille  $L$ -transverse de pseudo-gradients  $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ , où  $L > (s-1)T$ , au sens de la définition 2.2.31.*

*Alors, si la matrice de  $L$ -incidence  $A_0$  en  $t = 0$  vérifie*

$$\det_{\text{ab}}(A_0) = 1 + (\nu_{\text{ab}} < 0)$$

*cette propriété demeure vraie pour tout temps  $t \in [0,1]$  où la matrice de  $L$ -incidence est définie.*

*Démonstration.* Le choix de la famille  $\xi_t$  ne représente pas une contrainte du fait que la propriété d'être  $L$ -transverse est une propriété générique pour une famille de pseudo-gradients adaptés.

Soit  $R = \{t_1, \dots, t_r\}$  l'ensemble fini des temps de glissement où pour tout  $t_\kappa \in R$ , le champ  $\xi_{t_\kappa}$  n'est pas  $L$ -transverse et a une liaison  $L$ -élémentaire de type  $i/i$  ou  $(i+1)/(i+1)$ . La matrice de  $L$ -incidence est définie pour tout temps  $t \in [0,1] \setminus R$ , où  $\xi_t$  est  $L$ -transverse.

Du fait que la famille  $\alpha_t$  est de Morse à tout instant, les matrices considérées sont toutes dans  $\text{Mat}_s(\Lambda)$ , et localement constantes : elles ne changent qu'aux instants de  $R$ . Il suffit alors de regarder la variation de la matrices de  $L$ -incidence autour d'un temps de glissement  $t_\kappa$ . Notons par

$$\mathcal{P}_t \equiv [\det_{\text{ab}}(A_t) = 1 + (\nu_{\text{ab}} < 0)]$$

la propriété à démontrer.

Appelons  $A^\pm$  les matrices de  $L$ -incidence aux temps  $t^\pm := t_\kappa \pm \varepsilon$  respectivement, où  $\varepsilon$  est choisi assez petit pour que  $[t_\kappa - \varepsilon, t_\kappa + \varepsilon] \cap R = \{t_\kappa\}$ . On se limite au cas où le glissement a lieu entre  $p^l$  et  $p^k$ , deux zéros d'indice  $i+1$ . Soient  $g$  et  $\epsilon$  l'enroulement et le signe de la liaison  $\ell_\kappa$  de type  $(i+1)/(i+1)$  de  $p^l$  vers  $p^k$  ; on note par  $E$  la matrice élémentaire associée au glissement. L'étude de la proposition 2.2.36 nous dit que l'effet algébrique d'un glissement  $L$ -élémentaire sur les matrices de  $L$ -incidence est le suivant :

$$A^+ = \text{tr}_L(EA^-); \tag{3.1.1}$$

ainsi, le déterminant auquel on s'intéresse dans la propriété  $\mathcal{P}_{t+}$  vérifie

$$\det_{\text{ab}}(A^+) = \det_{\text{ab}}(\text{tr}_L(EA^-)) \quad (3.1.2)$$

Mais la matrice  $EA^-$  est tout de même une matrice dont les termes proviennent des enroulements des liaisons du couple  $(\alpha_{t+}, \xi_{t+})$  et sa positivité est majorée par  $T$  comme on a expliqué dans la remarque 2.1.40.

Ceci explique la contrainte sur la longueur  $L$  dans les hypothèses de l'énoncé : on a choisi  $L$  suffisamment grand pour pouvoir appliquer le corollaire du *lemme des longueurs* 1.1.34 à la matrice  $EA^-$ , ce qui nous donne

$$\det_{\text{ab}}(\text{tr}_L(EA^-)) = \det_{\text{ab}}(EA^-) + \lambda, \quad \text{où } \nu_{\text{ab}}(\lambda) < 0 \quad (3.1.3)$$

Grâce à (3.1.2) et (3.1.3), il suffit de voir que  $\det_{\text{ab}}(EA^-) = 1 + (\nu_{\text{ab}} < 0)$ . Voyons que la propriété  $\mathcal{P}_{t-}$  implique cette dernière égalité.

En utilisant la définition du déterminant abélianisé 1.1.28, le fait que l'abélianisation est un morphisme d'anneaux (lemme 1.1.27) et les propriétés usuelles des déterminants, on voit que

$$\begin{aligned} \det_{\text{ab}}(EA^-) &= \det(\text{ab}(EA^-)) = \det(\text{ab}(E) \text{ab}(A^-)) = \\ &= \det_{\text{ab}}(E) \det_{\text{ab}}(A^-) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

L'ensemble  $1 + (\nu_{\text{ab}} < 0)$  est multiplicatif et  $\det_{\text{ab}}(A^-)$  y appartient si on suppose  $\mathcal{P}_{t-}$ . Nous avons ainsi réduit le problème à l'étude du déterminant abélianisé des matrices élémentaires associées aux glissements : grâce à (3.1.4) il suffit que  $\det_{\text{ab}}(E)$  soit dans  $1 + (\nu_{\text{ab}} < 0)$  pour finir la preuve. On distingue deux cas, selon que nous soyons en présence d'un auto-glissement ( $k = l$ ) ou pas :

1. Si  $k \neq l$ , la matrice élémentaire  $E$  a déterminant abélianisé égal à 1, vu qu'elle est triangulaire avec des 1 sur la diagonale.<sup>3</sup>
2. Si  $k = l$ , la matrice  $E$  est diagonale avec un seul terme différent de 1, valant soit  $1 + \epsilon g$  soit  $1 + \epsilon g + (\epsilon g)^2 + \dots$ ; mais la liaison  $\ell_\kappa$  est associée à un auto-glissement et son  $u$ -enroulement est négatif :

$$0 < L(\ell_\kappa) = h(P^k) - (h(gP^k)) = -u(g).$$

On obtient dans tous les cas  $\det_{\text{ab}}(E) = 1 + (\nu_{\text{ab}} < 0)$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

**Proposition 3.1.22.** *Soit  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin basé, à deux indices  $i, i+1$ , à extrémités non-singulières, de taille  $T > 0$  et avec  $s$  paires de zéros aux instants de Morse. Supposons que  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  est d'évolution  $L$ -normale pour un équipement  $L$ -transverse  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  compatible, où  $L > (s-1)T$ .*

*Si  $t_1$  désigne un temps de pré-élimination, alors la matrice de  $L$ -incidence associée à  $\partial_{i+1}^{\xi_{t_1}}$  est « monômiale » : il s'agit d'une matrice sous la forme  $A_{t_1} = P_\sigma D$  où  $P_\sigma$  est une matrice permutation ( $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ ) et où  $D$  est une matrice diagonale dont les coefficients sont dans  $\pm \pi_1 M$ . De plus*

---

3. Clairement  $1 \in [1 + (\nu_{\text{ab}} < 0)]$  du fait que  $1 = 1 + 0$  et que  $\nu(0) = -\infty$ .



- le déterminant  $\pm \det(D)$  est un produit de commutateurs de  $\pi_1 M$  et
- la  $u$ -longueur de tous les  $g_k \in \text{supp}(D)$  vérifie  $u(g_k) \in ]-(s-1)T, T[ \subseteq ]-L, L[$ .

*Démonstration.* Appelons  $N, R, E \subset ]0, 1[$  les ensembles des instants de naissance, de glissements et d'élimination respectivement. Notons par  $(B_t)_{i+1} = \{P_t^1, \dots, P_t^s\}$ ,  $(B_t)_i = \{Q_t^1, \dots, Q_t^s\}$  les relevés où  $t$  est un temps de Morse et où le couple  $\{P_t^j, Q_t^j\}$  est celui qui découle de la  $j$ -ème naissance. Du fait que  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  réalise  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  comme un chemin d'évolution  $L$ -normale, on déduit deux faits :

- d'une part, les naissances sont  $L$ -indépendantes et il n'y a pas eu de glissement dans l'intervalle des naissances. Ainsi, quel que soit  $t_0 \in ]\max N, \min R[$ , la matrice de  $L$ -incidence de  $\partial_{i+1}^{\xi_{t_0}}$  par rapport aux bases  $B_{t_0}$ , notée  $A_{t_0}$ , est l'identité. En particulier, le déterminant abélianisé de  $A_{t_0}$  vaut 1, et la condition  $\det_{\text{ab}}(A_{t_0}) = 1 + (\nu_{\text{ab}} < 0)$  est remplie.
- d'autre part, soit  $t_1 \in ]\max R, \min E[$  un temps de pré-élimination ; notons par  $A_{t_1}$  la matrice de  $L$ -incidence associée à  $\partial_{i+1}^{\xi_{t_1}}$ . Vu que la famille  $(\alpha_t)_{t \in [t_0, t_1]}$  n'est constituée que des 1-formes de Morse, et que l'équipement considéré est  $L$ -transverse avec  $L > (s-1)T$ , le lemme 3.1.21 s'applique et on déduit que  $\det_{\text{ab}}(A_{t_1}) \in 1 + (\nu_{\text{ab}} < 0)$ . En particulier, ce déterminant est non-nul.

Supposons que  $P_{t_1}^1$  participe à la première élimination. Toute liaison qui part de  $p^1 := \pi(P^1)$  et arrive à un des  $q_{t_1}^j$ , à l'exception de celle qui réalise l'élimination de  $P_{t_1}^1$ , persiste dans la variété instable du point d'élimination. Comme les éliminations sont  $L$ -indépendantes, des telles liaisons ont un  $u$ -enroulement inférieur à  $-L$  et ne contribuent pas à la matrice d'incidence  $A_{t_1}$ . Cette matrice a au plus un coefficient non-nul dans la première ligne, de la forme  $\pm g_1$ , où  $g_1$  est l'enroulement de la liaison de  $p_{t_1}^1$  vers  $q_{t_1}^{\sigma(1)}$  qui réalise l'élimination dudit couple. Effectivement  $g_1$  apparaît dans  $A_{t_1}$  : si ce n'était pas le cas, dû au fait que  $u(g_1) < -L$ , la matrice  $A_{t_1}$  aurait une ligne de zéros et son déterminant abélianisé vaudrait 0, en contradiction avec ce qui est affirmé ci-dessus.

On obtient ainsi la matrice de  $L$ -incidence juste après la première élimination en effaçant la première ligne et la  $\sigma(1)$ -ème colonne qui correspondaient à  $p_t^1$  et à  $q_t^{\sigma(1)}$  respectivement. En effet l'élimination de la première paire ne fait apparaître aucune liaison d'enroulement supérieur à  $-L$ .

La situation est toujours à éliminations  $L$ -indépendantes et sans glissement après la première élimination. En itérant l'argument on déduit que la matrice  $A_{t_1}$  est ainsi de la forme  $P_\sigma D$  où  $P_\sigma$  est la matrice permutation associée à  $\sigma$  et  $D$  une matrice diagonale dont les éléments sont dans  $\pm \pi_1 M^{\geq -L}$ .

Nous avons donc  $\det_{\text{ab}}(A_{t_1}) = \det_{\text{ab}}(P_\sigma D) = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \det_{\text{ab}}(D) = \pm \det_{\text{ab}}(D)$ , ce qui force  $\pm \det_{\text{ab}}(D) = 1$ . On déduit que  $\pm \det(D) \in [\pi_1 M, \pi_1 M]$  des dernières affirmations.

Écrivons  $\det(D) = \prod_{j=1}^s g_j$ . Or les éléments  $g_j$  proviennent des enroulements des liaisons, leur  $u$ -enroulement est ainsi majoré par la taille  $T$  comme on a remarqué dans 2.1.26. Si  $s = 1$ ,  $u(g_1) = 0 < T$  et la deuxième affirmation est trivialement vraie. Montrons-la pour  $s \geq 2$ . Comme  $\pm \det(D) \in [\pi_1 M, \pi_1 M]$ , on a  $u\left(\prod_{j=1}^s g_j\right) = 0$  et donc  $-u(g_k) = \sum_{j \neq k}^s u(g_j)$ . On déduit que  $-u(g_k) < (s-1)T$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

## 3.2 Construction des lacets en queue d'aronde

**Construction 3.2.1.** À partir des données suivantes :

- une 1-forme  $\alpha_1 \in \Omega_{NS}^u$ ,
- un indice  $1 < i < n - 1$  où  $n + 1$  est la dimension de  $M$ ,
- un élément  $g \in \pi_1 M$  et un nombre  $L > |u(g)|$ ,

on construit un lacet  $(\beta_t)_{t \in [0,1]}$  à deux indices  $i$  et  $i + 1$ , d'origine  $\alpha_1$  et d'évolution  $L$ -normale tel que sa matrice de  $L$ -incidence à un temps de pré-élimination  $t_0$  est

$$\partial_{i+1}^{\xi_{t_0}} = \begin{pmatrix} 0 & -g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix}$$

Nous l'appelons lacet en queue d'aronde d'indice  $i$  d'origine  $\alpha_1$ .

On va construire un chemin  $(\beta_t)_{t \in [0, t_7^+]}$  partant de  $\beta_0 := \alpha_1$  et arrivant à une 1-forme non-singulière  $\beta_{t_7^+}$ , où  $t_7^+ \in ]0, 1[$ . On montrera que que  $\beta_{t_7^+}$  ainsi construite est isotope à  $\beta_0$ ; on pourra en particulier joindre  $\beta_{t_7^+}$  à  $\beta_0$  parmi les formes non-singulières pour obtenir le lacet cherché.

Le chemin  $(\beta_t)_{t \in [0,1]}$ , une fois équipé, va présenter sept accidents : deux instants de naissance, trois de glissement et deux d'élimination. On divise l'intervalle  $[0, 1]$  en huit sous-intervalles  $\{[t_{k-1}, t_k]\}_{k=1}^8$  où  $t_k := \frac{k}{8}$ . Le  $k$ -ème accident aura lieu dans l'intervalle  $[t_k^-, t_k^+] := [t_k - \varepsilon, t_k + \varepsilon]$ , où  $0 < \varepsilon < \frac{1}{16}$  est fixé une fois pour toutes. En dehors de ces intervalles, le chemin équipé sera constant : une fois que nous aurons expliqué le  $k$ -ème accident, on prolonge de façon constante dans l'intervalle  $[t_k^+, t_{k+1}^-]$ , à exception de l'intervalle  $[t_4^+, t_5^-]$  entre le quatrième et cinquième accident. Pour commencer, considérons le chemin  $(\beta_t)_{t \in [0, t_1^-]}$  constant et égal à  $\beta_0$ .

Premier accident. On considère un chemin de naissance  $(\beta_t)_{t \in [t_1^-, t_1^+]}$  d'indice  $i$  issu de  $\beta_{t_1^-}$  et centré en  $t_1$ . On choisit des primitives  $(h_t)_{t \in [t_1^-, t_1^+]}$  ainsi que  $B^1$  un relevé quelconque du zéro de naissance. On suit par continuité le couple des zéros  $P_t^1, Q_t^1$  d'indices respectifs  $i + 1, i$  que  $B^1$  détermine pour des temps  $t > t_1$  comme dans 2.2.22.

Deuxième accident. Comme  $h_{t_2^-}(Q_{t_2^-}^1) < h_{t_2^-}(P_{t_2^-}^1)$ , on trouve un cylindre  $C_{t_2^-} \subseteq \widetilde{M} \setminus \text{Crit}(h_{t_2^-})$  adapté à  $\beta_{t_2^-}$ , feuilleté en disques par les niveaux de  $h_{t_2^-}$ , et vérifiant

$$h_{t_2^-}(gQ_{t_2^-}^1) < h_{t_2^-}(C_{t_2^-}^-) < h_{t_2^-}(C_{t_2^-}^+) < h_{t_2^-}(gP_{t_2^-}^1) \quad (3.2.1)$$

Comme le cylindre est feuilleté en disques par le niveau,  $\beta_{t_2^-}|_{\pi(C_{t_2^-})}$  est semi-conjugué à l'extrémité initiale d'un modèle de naissance d'indice  $i$  et on peut appliquer le théorème 2.2.13 qui nous donne un chemin de naissance d'indice  $i$  issu de  $\beta_{t_2^-}$ , que l'on suppose centré en  $t_2$ . Il est modelé par des cylindres  $(C_t)_{t \in [t_2^-, t_2^+]}$ . On appelle  $(\beta_t)_{t \in [t_2^-, t_2^+]}$  la famille de 1-formes associée. On peut choisir le chemin de sorte que la condition sur la hauteur des couvercle des cylindres (3.2.1) soit vérifiée pour tout  $t \in [t_2^-, t_2^+]$ . On choisit pour  $B^2$  le seul relevé du nouveau zéro de naissance qui est dans  $C_{t_2}$ . On désigne par  $P_t^2$  et  $Q_t^2$  les relevés du couple des zéros de Morse qui en découlent pour des temps  $t > t_2$ . On remarque que  $(\beta_t)_{t \in [0, t_2^+]}$  est d'évolution normale. On construit une famille de champs  $(\xi_t)_{t \in [0, t_2^+]}$  qui est un équipement  $L$ -transverse pour  $(\beta_t, B_t)_{t \in [0, t_2^+]}$  et qui ne contient aucun glissement. Du fait qu'il n'y a pas de centre dans cette famille, on peut le

construire de sorte que les deux naissances soient  $L$ -indépendantes. La famille  $(\beta_t, \xi_t, B_t)_{t \in [0, t_2^+]}$  est d'évolution  $L$ -normale. La seule matrice de  $L$ -incidence associée à  $(\xi_{t_2^+}, B_{t_2^+})$  non-nulle est celle de  $\partial_{i+1}^{\xi_{t_2^+}}$ . Elle est l'identité  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  par construction. Le graphique de Cerf-Novikov associé à la construction apparaît dans la figure 3.14, où ce graphique ainsi que les suivants se placent tous dans le cas où  $u(g) > 0$ , et où on représente aussi la trace des brins qui sont concernés par la construction. On remarque que dans le cas que l'on représente, il est licite de supposer que le trait du graphique correspondant au brin de  $gQ^1$  est au-dessus de celui de  $P_1$  : ceci équivaut à prendre les cylindres qui modèlent le chemin de naissance de hauteur  $h_t(C_t^+) - h_t(C_t^-)$  inférieure à  $u(g) > 0$ . Ceci est toujours possible vu que nous pouvons choisir les cylindres de hauteur aussi petite que l'on veut, mais ce n'est pas fondamental pour la preuve, qui fonctionne indépendamment du signe de  $u(g)$ .

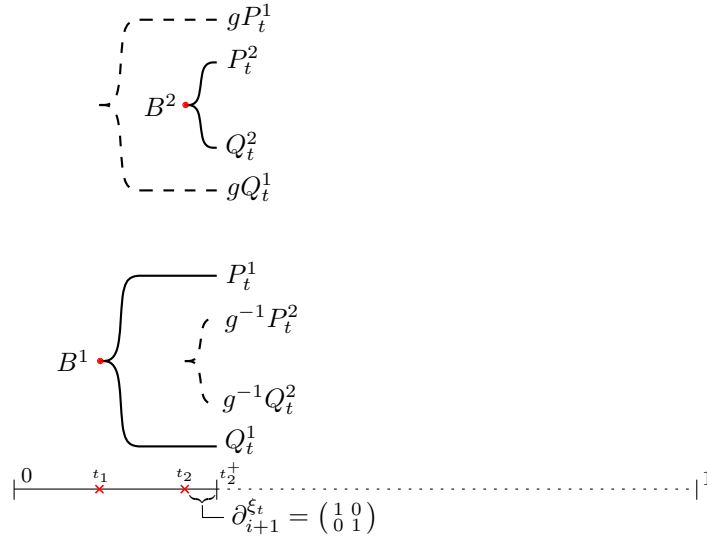


FIGURE 3.14 – Valeurs critiques des primitives  $(h_t)_{t \in [0, t_2^+]}$  des points critiques concernés.

Troisième accident. Grâce à (3.2.1), on a en particulier que  $h_{t_2^+}(C_{t_2^+}^+) < h_{t_2^+}(gP_{t_2^+}^1)$ , et comme les points critiques  $P_t^2, Q_t^2$  sont à l'intérieur des cylindres correspondants on a  $h_{t_2^+}(P_{t_2^+}^2) < h_{t_2^+}(C_{t_2^+}^+)$ . On déduit que  $h_{t_2^+}(g^{-1}P_{t_2^+}^2) < h_{t_2^+}(P_{t_2^+}^1)$ . Ceci est toujours vérifié en  $t = t_3^-$  vu que l'on a prolongé de façon constante. L'indice de  $P^1$  et de  $P^2$  est  $2 < i+1 < n$  et par ailleurs  $|u(g^{-1})| = |u(g)| < L$ ; les hypothèses de la proposition 2.2.39 sont ainsi remplies. Nous prolongeons le chemin de 1-formes basées de façon constante dans l'intervalle  $[t_3^-, t_3^+]$  auquel on applique la proposition citée pour trouver un chemin de champs  $(\xi_t)_{t \in [t_3^-, t_3^+]}$  tous adaptés à  $(\beta_{t_3^-}, B_{t_3^-})$  qui réalise le glissement noté par  $P^1 / -g^{-1}P^2$ . On peut supposer que l'instant de la liaison  $L$ -élémentaire est  $t_3$ . Grâce à la proposition 2.2.36, on sait que la matrice de  $L$ -incidence pour les temps  $t \in ]t_3, t_3^+]$  est  $\text{tr}_L(E_{12}^{-g^{-1}} \text{Id}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -g^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . On représente la liaison entre points de même indice à l'instant de glissement par une flèche reliant les points concernés dans le graphique de Cerf-Novikov comme on observe dans la figure 3.15.

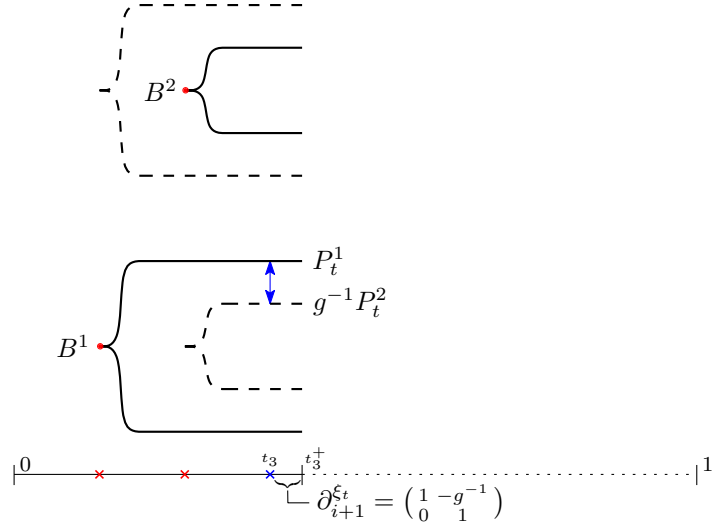


FIGURE 3.15 – Graphique après le premier glissement.

Quatrième accident. Nous voulons effectuer un deuxième glissement élémentaire entre des points d'indice  $i$ . On veut que  $Q^2$  glisse par dessus de  $-gQ^1$ . Ce glissement qui est noté par  $Q^2 / -gQ^1$ , résulte aussi d'appliquer la proposition 2.2.39. Les hypothèses sont vérifiées puisque :

- les relevés  $Q^2, Q^1$  sont de même indice  $i$  vérifiant  $1 < i < n - 1$ ,
- d'un côté  $|u(g)| < L$ ,
- et d'un autre côté, comme ni les primitives ni les relevés n'ont changé en  $[t_2^+, t_4^-]$ , et la condition (3.2.1) est vérifiée pour  $t = t_2^+$ , nous avons que  $h_{t_4^-}(gQ_{t_4^-}^1) < h_{t_4^-}(C_{t_4^-}^-) < h_{t_4^-}(Q_{t_4^-}^2)$ .

On prolonge ainsi la famille de 1-formes de façon constante en  $[t_4^-, t_4^+]$  et grâce à 2.2.39 on trouve un équipement  $L$ -transverse réalisant le glissement souhaité ; on peut supposer que l'instant de glissement est  $t_4$ . La matrice de  $L$ -incidence pour les temps  $t \in ]t_4, t_4^+]$  est ainsi

$$\text{tr}_L \left( \begin{pmatrix} 1 & -g^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E_{21}^g \right) = \begin{pmatrix} 1 & -g^{-1} \\ g & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -g^{-1} \\ g & 1 \end{pmatrix} \quad (3.2.2)$$

L'évolution du graphique est dans la figure 3.16.

On souligne le fait que pour les temps  $t < t_4$ , l'intersection algébrique des variétés invariantes concernant les liaisons de  $|u|$ -enroulement plus petit que  $L$  représente fidèlement leur intersection géométrique jusqu'à la longueur associée à cet enroulement. Cette situation perdure après  $t_4$  : la liaison qui existait juste avant  $t_4$  de  $P^1$  vers  $Q^1$  disparaît après  $t_4$  et une nouvelle de  $P^2$  vers  $gQ^1$  apparaît.

Cinquième accident. Fixons momentanément l'attention en  $t = t_4^+$ . On souhaite faire un troisième et dernier glissement  $P^2 / gP^1$ , mais à présent on ne peut pas le réaliser vu qu'on a toujours la condition (3.2.1) qui nous dit en particulier  $h(P^2) < h(gP^1)$ . Cependant, comme  $\xi$  est  $L$ -transverse pour  $\beta$  et comme  $p^2$  est un zéro d'indice maximal de  $\beta$ , aucune liaison de  $|u|$ -enroulement inférieur à  $L$  ne peut arriver à  $P^2$ .

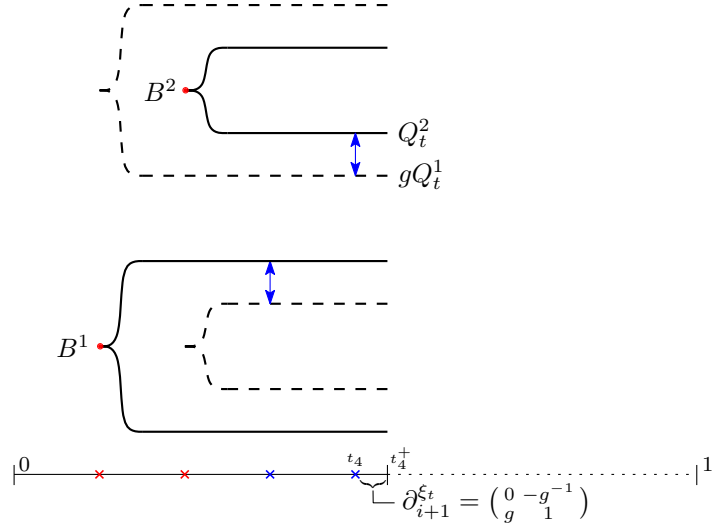


FIGURE 3.16 – Graphique après le deuxième glissement.

Ainsi, pour pouvoir appliquer le lemme 2.2.34 à  $P^2$  et faire monter<sup>4</sup> sa valeur critique par dessus celle de  $gP^1$ , il suffit d'avoir la condition  $h(gP^1) - h(P^2) < L$ . On dira simplement « faire monter  $P^2$  par dessus  $gP^1$  ». La condition est satisfaite dès que le cylindre de la première naissance est de hauteur plus petite que  $L$ , ce qui ne représente aucune contrainte du fait que les cylindres peuvent être choisis si petits que l'on souhaite. En effet, d'après (3.2.1), qui est vérifiée pour  $t = t_4^+$  on a

$$h(gP^1) - h(P^2) < h(gP^1) - h(gQ^1) = h(P^1) - h(Q^1) < h(C^+) - h(C^-) < L$$

et nous avons donc un disque fermé  $D$  plongé dans  $W^s(P^2)$  dont le bord est dans un niveau strictement supérieur à celui qui contient  $gP^1$ . On applique ainsi le lemme 2.2.34 à  $\beta_{t_4^+}$  et à  $P_{t_4^+}^2 \in B_{t_4^+}$  pour obtenir un chemin  $(\beta_t)_{t \in [t_4^+, t_5^-]}$  de 1-formes de Morse dans la classe  $u$ , pour lesquelles le dernier champ de vecteurs basé que nous avons construit, noté par  $(\xi_{t_4^+}, B_{t_4^+})$ , est toujours adapté et  $L$ -transverse, et tel que  $h_{t_5^-}(P_{t_5^-}^2) > h_{t_5^-}(gP_{t_5^-}^1)$ .

Les hypothèses de 2.2.39 sont maintenant vérifiées pour réaliser le glissement  $P^2 / gP^1$  : on prolonge la famille de 1-formes de façon constante jusqu'à  $t = t_5^+$  et on prend une famille générique de champs  $(\xi_t)_{t \in [t_5^-, t_5^+]}$  tous adaptés à  $\beta_{t_5^-}$  avec un seul instant de glissement que l'on suppose en  $t_5$ . La proposition 2.2.36 nous dit que la matrice de  $L$ -incidence après ce dernier glissement est donnée par

$$\text{tr}_L \left( E_{21}^g \begin{pmatrix} 0 & -g^{-1} \\ g & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & -g^{-1} \\ g & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -g^{-1} \\ g & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.3)$$

On remarque que toutes les liaisons de  $|u|$ -enroulement plus petit que  $L$  sont représentées dans la matrice de  $L$ -incidence aussi pour  $t \in ]t_5, t_5^+]$ . La modification du graphique est sur la figure 3.17.

4. Voir la remarque 2.2.35.

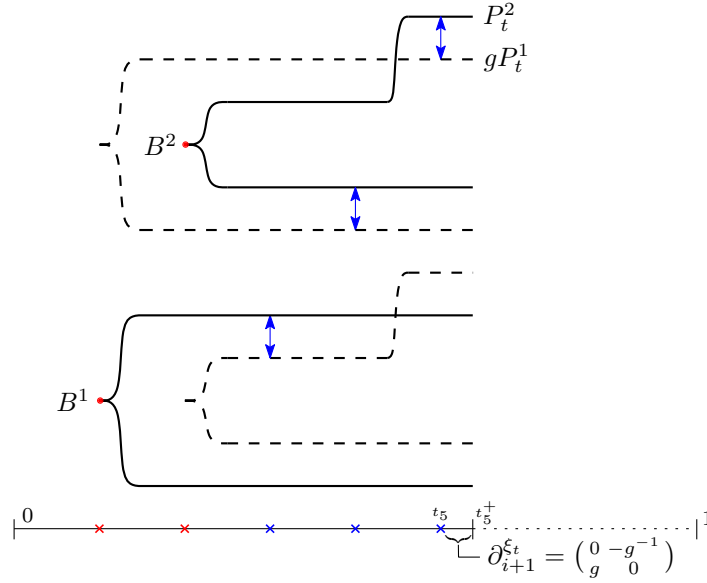


FIGURE 3.17 – Graphique après le troisième glissement.

En  $t = t_5^+$ , la position relative des relevés est  $h(Q^1) < h(g^{-1}Q^2) < h(P^1) < h(g^{-1}P^2)$ . On n'a aucune obstruction à rapprocher  $P^1$  de  $g^{-1}Q^2$  autant que l'on veut en utilisant la proposition 2.2.34 en  $[t_5^+, t_6^-]$  pour que l'on puisse trouver un cylindre  $C_{t_6^-}$  comme ci-dessous.

Sixième accident. Nous sommes en  $t = t_6^-$ . Prenons  $a, b \in \mathbb{R}$  deux valeurs telles que

1.  $a < h(g^{-1}Q^2) < h(P^1) < b$  suffisamment proches pour que
2. la variété instable  $W^u(g^{-1}Q^2)$  ne rencontre pas d'autre point critique de  $h$  avant d'arriver au niveau  $A := h^{-1}(a)$  et la variété stable  $W^s(P^1)$  ne rencontre pas d'autre point critique de  $h$  après traverser le niveau  $B := h^{-1}(b)$ .

On peut trouver un cylindre  $C := C_{t_6^-}$  adapté à  $\beta$  au sens de 2.2.7 vérifiant  $C \cap \text{Crit } h = \{P^1, g^{-1}Q^2\}$  et tel que

- les couvercles  $C^-, C^+$  soient contenus dans les niveaux  $A, B$  respectivement et
- les disques  $W^u(g^{-1}Q^2) \cap h^{-1}([a, +\infty[)$  et  $W^s(P^1) \cap h^{-1}(] - \infty, b])$  soient contenus dans  $C \setminus \partial_{\text{lat}} C$ .

Le couple  $(h|_C, \tilde{\xi}|_C)$  est dans les conditions pour appliquer le procédé d'élimination de Morse-Smale (voir [Mi2, Th. 5.4] ou [Lau1, Lem. 2.7]). La 1-forme  $\beta_{t_6^-}|_{\pi(C)}$  est semi-conjuguée à l'extrémité finale d'un modèle de naissance d'indice  $i$ , notée par  $F_{t_6^-}^i$  (voir 2.2.9 et 2.2.10). Prenons un chemin d'élimination d'indice  $i$  et centré en  $t_6$  réalisant l'élimination de  $P^1$  avec  $g^{-1}Q^2$ . On note par  $(\beta_t, B_t)_{t \in [t_6^-, t_6^+]}$  la famille de 1-formes basée associée, que l'on équipe avec une famille  $L$ -transverse  $(\xi_t)_{t \in [t_6^-, t_6^+]}$  de sorte que l'élimination soit  $L$ -indépendante. Si on note  $(C_t)_{t \in [t_6^-, t_6^+]}$  les cylindres qui modèlent le chemin d'élimination,  $\varphi_t : C_t \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  les semi-conjugaisons du

chemin et  $U_t$  un petit voisinage ouvert de  $\pi(C_t)$ , on peut prendre par exemple

$$\xi_t := \begin{cases} \pi_*(-\nabla(\varphi_t^* F_t^i)) & \text{sur } \pi(C_t) \\ \xi_{t_6^-} & \text{sur } M \setminus U_t \\ \psi_t & \text{sur } \overline{U_t \setminus \pi(C_t)} \end{cases}$$

où  $\psi_t$  est un champ pseudo-gradient adapté à  $\beta_t|_{\overline{U_t \setminus \pi(C_t)}}$  quelconque qui coïncide dans chaque composante du bord de  $\overline{U_t \setminus \pi(C_t)}$  avec la formule correspondante dans la définition de  $\xi_t$ . On remarque que comme la seule liaison de  $|u|$ -enroulement inférieur à  $L$  concernée avec  $P^1$  et  $g^{-1}Q^2$  avant l'élimination est celle contenue dans  $C$ , on peut choisir les couvercles  $C^\pm$  disjoints de toutes les variétés invariantes  $W^s(kR)$  où  $R \in \{P^1, P^2, Q^1, Q^2\}$  et  $k \in \pi_1 M$  tel que  $|u(k)| < L$ . Le zéro d'élimination en temps  $t_6$  est ainsi  $L$ -indépendant et en particulier, cette dernière déformation n'introduit aucune nouvelle liaison. La matrice de  $L$ -incidence pour tout  $t \in ]t_6, t_6^+]$  est donc égale à  $(g)$ .

On montre le changement du graphique dans la figure 3.18. On en profite pour donner un exemple de la convention du choix des zéros d'élimination expliquée dans 2.2.21 : le relevé du zéro d'élimination choisi est noté par  $E^1$ , qui est la fin du brin associé à  $P^1$ .

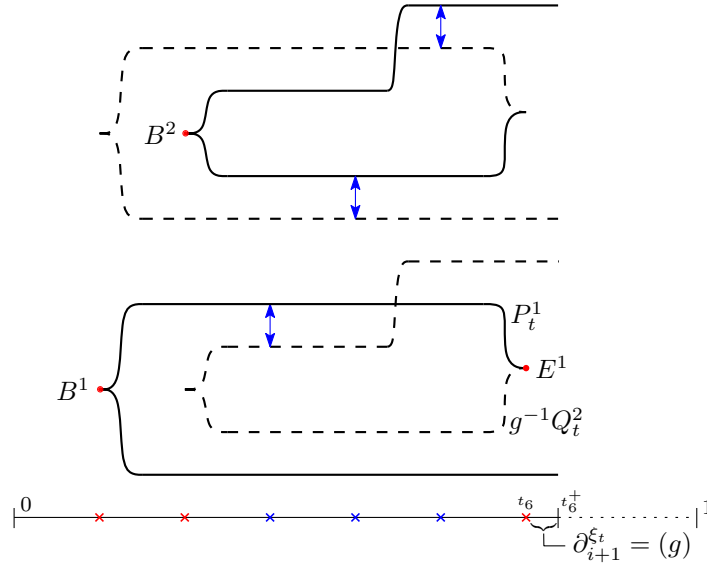


FIGURE 3.18 – Graphique après la première élimination.

Septième accident. On prend la précaution de rapprocher  $P^2$  de  $gQ^1$  en appliquant 2.2.34 en  $[t_6^+, t_7^-]$  pour pouvoir choisir un cylindre  $C_{t_7^-}$  aussi petit que l'on veut et vérifiant des conditions analogues à celles de l'étape précédente. On applique de nouveau le théorème d'élimination de Morse-Smale comme précédemment. La figure 3.19 montre le graphique de Cerf-Novikov de la famille basée  $(\beta_t, B_t)_{t \in [0, t_7^+]}$ .

On est arrivé à une 1-forme non-singulière  $\beta_{t_7^+}$ . Le chemin  $(\beta_t)_{t \in [0, t_7^+]}$  équipé par  $(\xi_t)_{t \in [0, t_7^+]}$  est d'évolution  $L$ -normale et possède la matrice de pré-élimination souhaitée. La construction est essentiellement terminée : la proposition suivante permettra de fermer le lacet par un chemin

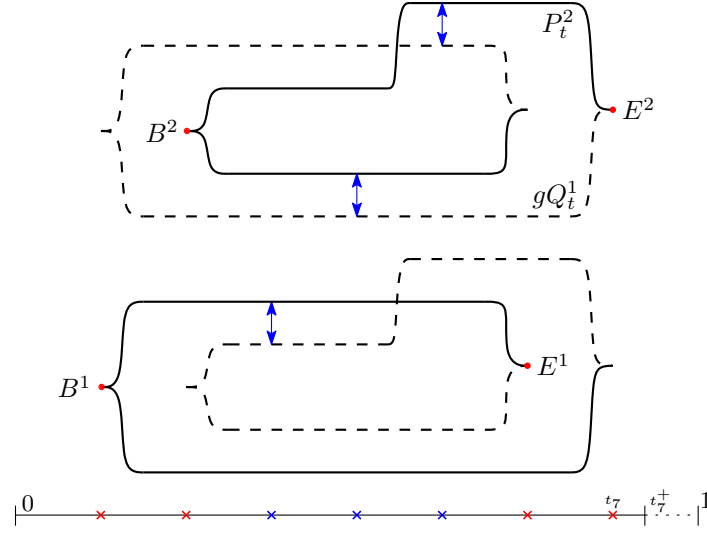


FIGURE 3.19 – Graphique après la deuxième élimination.

$(\beta_t)_{t \in [t_7^+, 1]}$  constitué de 1-formes non-singulières où  $\beta_1 = \alpha_1$ . □

**Proposition 3.2.2.** *Le chemin  $(\beta_t)_{t \in [0, t_7^+]}$  construit dans 3.2.1 peut se déformer à extrémités fixes, en un autre  $(\beta'_t)_{t \in [0, t_7^+]}$  constitué de 1-formes non-singulières.*

*Démonstration.* On démontre la proposition en exhibant une famille de 1-formes à deux paramètres  $(\beta_{t,s})_{(t,s) \in [0, t_7^+] \times [0, 1]}$  qui est constante en  $s$  pour les valeurs  $t = 0, t_7^+$ , qui coïncide avec le chemin que l'on a construit en  $s = 0$  et qui est constituée de 1-formes non-singulières en  $s = 1$ . Nous la décrivons en quatre étapes, que l'on interprète comme des modifications du chemin initial ; soient  $0 < s_1 < s_2 < s_3 < 1$ . Les deux premières modifications ne concernent que la famille des champs de vecteurs : on prend  $\beta_{t,s} = \beta_t$  pour tout  $s \in [0, s_2]$  et  $t \in [0, t_7^+]$ . Lors des modifications, on munit au fur et à mesure des primitives  $(h_{t,s})_{(t,s) \in [0, t_7^+] \times [0, 1]}$ .

Première modification. On pose  $\xi_{t,0} := \xi_t$  pour tout  $t \in [t_2^-, t_3^+]$ . On construit un équipement  $L$ -transverse  $(\xi_{t,s_1})_{t \in [t_2^-, t_3^+]}$  pour la famille  $(\beta_t)_{t \in [t_2^-, t_3^+]}$  tel que :

- $\xi_{t_2^-, s_1} = \xi_{t_2^-, 0}$  et  $\xi_{t_3^+, s_1} = \xi_{t_3^+, 0}$ ,
  - il ne présente aucun instant de liaison  $L$ -élémentaire et
  - les variétés invariantes de la naissance  $B_{t_2}^2$  vérifient pour  $g, k \in \pi_1 M$  :
- $$\begin{cases} W^s(B_{t_2}^2) \cap W^u(gP_{t_2}^1) = \{(\ell_{t_2}, -)\}, & W^s(B_{t_2}^2) \cap W^u(kP_{t_2}^1) = \emptyset \text{ pour tout } k \neq g \text{ tel que } u(k) < L, \\ W^u(B_{t_2}^2) \cap W^u(kQ_{t_2}^1) = \emptyset \text{ pour tout } k \text{ tel que } u(k) > -L. \end{cases}$$

Autrement dit, il est demandé que pour  $s = s_1$ , la naissance  $B_{t_2}^2$  ne soit pas  $L$ -indépendante et que les variétés invariantes  $W^s(Q_t^2)$  et  $W^u(gP_t^1)$  associées à cet équipement s'intersectent dans une seule liaison négative  $\ell_t$ , et ce pour tout  $t \in ]t_2, t_3^+]$ .

Rappelons une partie de la construction 3.2.1. On notait  $(C_t)_{t \in [t_2^-, t_2^+]}$  les cylindres qui modèlent la deuxième naissance. Prenons, pour tout  $t \in [t_2^-, t_2^+]$ , le niveau  $L_t := h_t^{-1}(h_t(g^{-1}C_t^+))$  contenant le couvercle supérieur du cylindre  $g^{-1}C_t$ . Comme dans l'intervalle  $[t_2^+, t_3^+]$ , les 1-formes et les



primitives ne varient pas, on peut voir le niveau  $L_{t_2^+} = h_t^{-1}(c)$  comme un niveau constant et indépendant de  $t \in [t_2^+, t_3^+]$ , qui est par ailleurs au-dessous de  $P_t^1$  et au-dessus de  $g^{-1}Q_t^2$  pour tout  $t \in [t_2^+, t_3^+]$ .

On remarque que, pour tout  $t \in [t_2, t_2^+]$ , nous avons un disque fermé distingué  $\mathbb{D}_t^{n-i}$  plongé dans le niveau  $L_t$ . Il s'agit de :

$$\mathbb{D}_t^{n-i} = \begin{cases} (W^s(g^{-1}P_t^2) \cup W^s(g^{-1}Q_t^2)) \cap L_t & \text{si } t \in ]t_2, t_2^+] \\ W^s(g^{-1}B_{t_2}^2) \cap L_t & \text{si } t = t_2 \end{cases}$$

Le premier glissement qui a lieu dans la construction de 3.2.1 est prescrit par un chemin  $\gamma_{t_3^-} : [0, 1] \rightarrow L_{t_3^-}$  allant de  $x_{t_3^-} \in W^u(P_{t_3^-}^1)$  à  $y_{t_3^-} \in W^s(g^{-1}P_{t_3^-}^2) \subseteq \mathbb{D}_{t_3^-}^{n-i}$  et qui évite ailleurs les variétés invariantes  $kW^{s/u}(R)$ , où  $R$  est un des relevés dans  $B_{t_3^-}$  et  $k \in \pi_1 M$  est tel que  $|u(k)| < L$ . On peut trouver, une famille continue des chemins  $\gamma_t : [0, 1] \rightarrow L_t$ , où  $t \in [t_2^-, t_3^-]$ , qui aboutit au  $\gamma_{t_3^-}$  donné et qui vérifie :

- si  $t \in [t_2^+, t_3^-]$ , on prend  $\gamma_t = \gamma_{t_3^-}$  ;
- si  $t \in ]t_2, t_2^+]$ ,  $\gamma_t$  relie un  $x_t \in W^u(P_t^1)$  à un  $y_t \in W^s(g^{-1}P_t^2)$  en évitant ailleurs les variétés invariantes  $kW^{s/u}(R)$ , où  $R \in B_t$  et  $k \in \pi_1 M$  est tel que  $|u(k)| < L$  ;
- si  $t = t_2$ ,  $\gamma_{t_2}$  relie un  $x_{t_2} \in W^u(P_{t_2}^1)$  à un  $y_{t_2}$  qui est forcément, par continuité de la famille, dans  $\partial\mathbb{D}_{t_2}^{n-i}$ . On demande qu'il évite ailleurs les variétés invariantes  $kW^{s/u}(R)$ , où  $R \in B_{t_2}$  et  $k \in \pi_1 M$  est tel que  $|u(k)| < L$  ;
- si  $t \in [t_2^-, t_2[$ ,  $\gamma_t$  relie un  $x_t \in W^u(P_t^1)$  à un point  $y_t$  dans l'intérieur de  $C_t^+$  comme sous-espace topologique du niveau  $L_t$ .

Nous avons ainsi, pour chaque  $t \in [t_2^-, t_3^-]$  une famille  $(\xi_{t,s})_{s \in [0, s_1]}$  de pseudo-gradients pour  $\beta_t$  qui est  $L$ -transverse, et qui réalise l'isotopie de plongement dans le niveau  $L_t$  de « type glissement » : la trace de la famille  $(W^u(P_{t,s}^1))_{s \in [0, s_1]}$  dans  $L_t$  est stationnaire sauf au voisinage de  $\gamma_t$ , et elle balaye l'image de  $\gamma_t$ . On remarque que les chemins sont choisis de sorte que cette opération réalise le glissement avec signe négatif pour tout  $t \in ]t_2, t_2^+]$ .

La famille  $(\xi_{t_2^-, s})_{s \in [0, s_1]}$  est constituée de pseudo-gradients de  $\beta_{t_2^-}$  et est  $L$ -transverse. La variété instable de  $P_{t_2^-}^1$  pour  $\xi_{t_2^-, s_1}$  est positionnée de sorte que, si on introduit la deuxième naissance comme dans la construction 3.2.1, la famille  $(\xi_{t,s_1})_{t \in [t_2^-, t_3^-]}$  est adaptée, par construction, au chemin de 1-formes et la variété stable associée au relevé de naissance  $g^{-1}B_{t_2}^2$  contient une liaison négative  $g^{-1}\ell_{t_2}$  qui vient de  $P_{t_2}^1$  et qui persiste dans la variété stable de  $g^{-1}Q_t^2$  pour des  $t > t_2$ .

Ainsi, à reparamétrage près, la famille  $(\xi_{t_2^-, s})_{s \in [0, s_1]} * (\xi_{t,s_1})_{t \in [t_2^-, t_3^+]}$  est celle de mêmes extrémités que l'on cherchait. La situation est représentée schématiquement dans la figure 3.20, où l'équipement que l'on vient de citer correspond à parcourir la colonne gauche vers le bas puis la ligne en bas vers la droite. Avant cette première modification, l'équipement correspondait à parcourir d'abord la ligne en haut vers la droite puis la colonne à droite vers le bas. Deuxième modification. On fait un raisonnement analogue, où le paramètre  $s$  parcourt l'intervalle  $[s_1, s_2]$  pour relier la famille  $(\xi_{t,s_1})_{t \in [t_5^-, t_6^+]}$  à un équipement  $L$ -transverse de mêmes extrémités pour  $(\beta_t, B_t)_{t \in [t_5^-, t_6^+]}$ , noté par  $(\xi_{t,s_2})_{t \in [t_5^-, t_6^+]}$ , qui ne présente aucun instant avec des liaisons  $L$ -élémentaires et où l'élimination  $E_{t_6}^1$  est non  $L$ -indépendante. La non  $L$ -indépendance

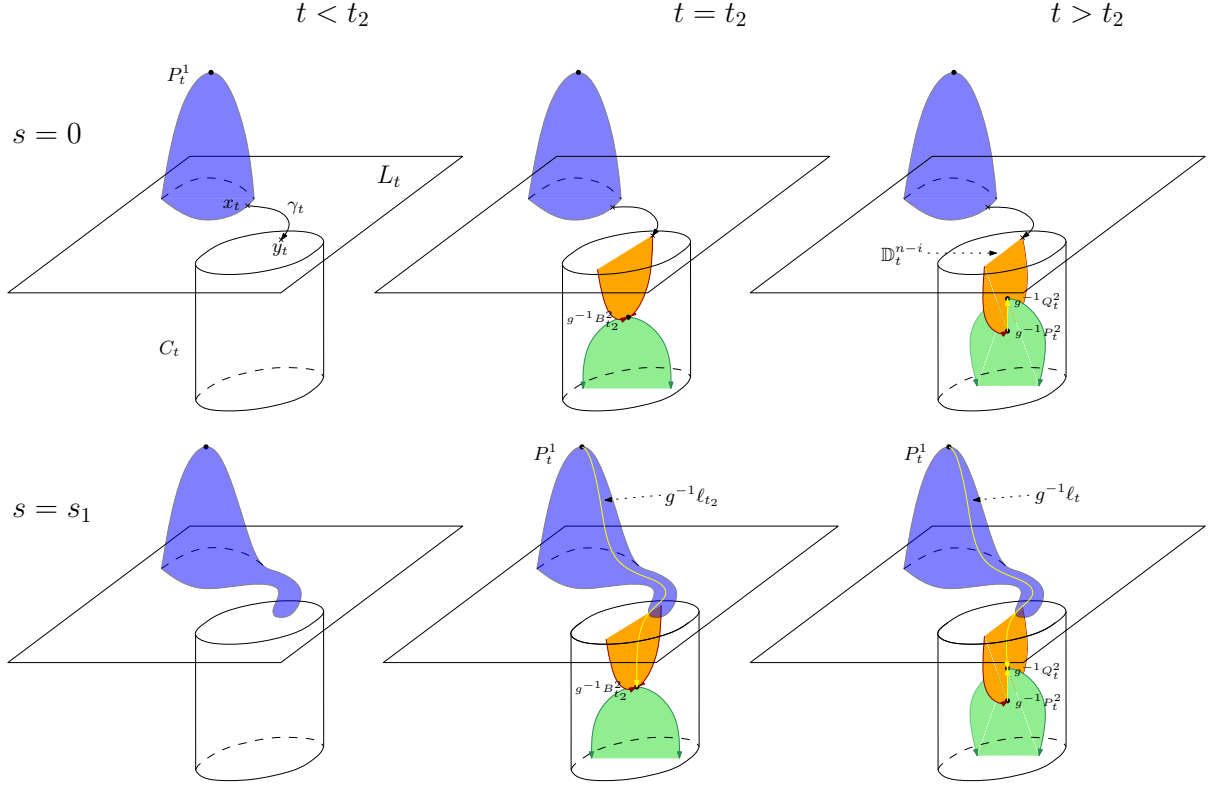


FIGURE 3.20 – Variétés invariantes associées à  $P_t^1, g^{-1}B_{t_2}^2, g^{-1}P_t^2, g^{-1}Q_t^2$  et à la famille  $(\xi_{t,s})_{(t,s) \in [t_2^-, t_3^+] \times [0, s_1]}$  pour certaines valeurs des paramètres.

de la famille en  $s = s_2$  est due cette fois à la liaison positive  $\{(\ell', +)\}$  qu'est l'intersection  $W^u(E_{t_6}^1) \cap W^s(Q_{t_6}^1)$ . On prend  $\xi_{t,s} := \xi_{t,s_1}$  pour tout  $(t, s) \in ([0, t_5^-] \cup [t_6^+, t_7^+]) \times [s_1, s_2]$ .

On déduit de la construction que pour tout  $t \in ]t_2, t_6[$ , les variétés instables  $W^u(P_{t,s_2}^2)$  et  $W^u(gP_{t,s_2}^1)$  intersectent chacune la variété stable  $W^s(Q_{t,s_2}^2)$  en une unique liaison, dont les signes sont opposés. De plus, toute autre trajectoire issue de ces variétés instables descend en dessous du niveau qui contient  $Q_{t,s_2}^2$ . Cette situation est appelée *queue d'aronde élémentaire*. On lit toutes les liaisons de  $|u|$ -enroulement inférieur à  $L$  dans les matrices de  $L$ -incidence puisqu'il n'existe pas de paire de liaisons annulables. Si  $A_t$  désigne la matrice de  $L$ -incidence de  $\partial_{i+1}^{\xi_{t,s_2}}$ , par construction de  $\xi_{t,s_2}$  on a

$$\begin{cases} A_t = (1) & \text{si } t \in [t_2^-, t_2[ \\ A_t = \begin{pmatrix} 1 & -g^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } t \in ]t_2, t_4[ \\ A_t = \begin{pmatrix} 0 & -g^{-1} \\ g & 1 \end{pmatrix} & \text{si } t \in ]t_4, t_6[ \\ A_t = (g) & \text{si } t \in ]t_6, t_6^+]. \end{cases}$$

On remarque que la colonne associée à  $Q_t^2$  des matrices  $A_t$  est constamment  $\begin{pmatrix} -g^{-1} \\ 1 \end{pmatrix}$  là où elle est définie; ceci correspond aux deux liaisons citées pour avoir une queue d'aronde élémentaire. Le

graphique de Cerf-Novikov n'a pas changé lors des deux dernières modifications, sauf en ce qui concerne les glissements ; il est représenté dans la figure 3.21.

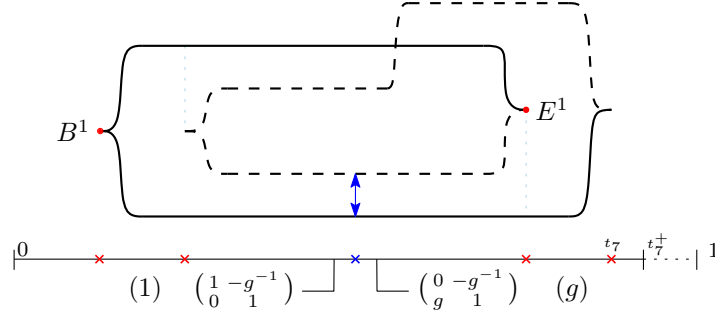


FIGURE 3.21 – Graphique d'une queue d'aronde élémentaire.

Troisième modification. La déformation sera stationnaire en dehors de  $[t_2^-, t_6^+] \times [s_2, s_3]$ . Considérons la famille  $(\beta_{t,s_2}, B_{t,s_2})_{t \in [t_2, t_6]}$ . Soit  $c \in \mathbb{R}$  tel que le niveau  $h_t^{-1}(c)$  soit au-dessus de  $Q_{t,s_2}^1$  et en dessous de  $g^{-1}Q_{t,s_2}^2$  pour tout  $t \in ]t_2, t_6[$ . Définissons  $\widetilde{M}_t^{\geq c} := h_t^{-1}([c, +\infty[)$  et prenons, pour tout  $t \in ]t_2, t_6[$  l'adhérence de  $(W^u(P_{t,s_2}^1) \cup W^u(g^{-1}P_{t,s_2}^2)) \cap \widetilde{M}_t^{\geq c}$  qui est un disque fermé de dimension  $i+1$  et que l'on note par  $W_t$ . Ce disque est séparé en deux par le disque de dimension  $i$  donné par  $W^u(g^{-1}Q_{t,s_2}^2) \cap \widetilde{M}_t^{\geq c}$ . Par construction de  $(\beta_{t,s_2}, B_{t,s_2})_{t \in [t_2, t_6]}$  on peut prendre des voisinages tubulaires de  $W_t$  dans  $\widetilde{M}$ , notés par  $U_t$ , assez petits pour qu'ils vérifient les conditions suivantes pour tout  $t \in ]t_2, t_6[$  :

- le voisinage  $U_t$  ne contient aucun autre point critique de  $h_t$  à part les trois mentionnés et
- la projection  $\pi|_{U_t}$  est injective.

On s'est placé dans la situation de queue d'aronde élémentaire, comme rédigé dans [Lau1, Lemma 2.6]. Autrement dit, le chemin de 1-formes  $(\beta_{t,s_2}|_{U_t})_{t \in [t_2^-, t_6^+]}$  est semi-conjugué à la famille  $G_{t,s_2}^{i+1}$  d'un modèle de queue d'aronde descendante d'indice  $i+1$  centré en  $(t', s')$  comme dans 2.2.16, pour une certaine valeur  $(t', s') \in ]t_2, t_6[ \times ]s_2, s_3[$ . Nous pouvons appliquer le lemme cité à la famille de primitives  $(h_{t,s_2}|_{U_t})_{t \in [t_2^-, t_6^+]}$  de façon  $\pi_1 M$ -équivariante grâce à l'injectivité de  $\pi$  sur les  $U_t$ . Ceci nous fournit une famille à deux paramètres de primitives  $(h_{t,s}|_{U_t})_{(t,s) \in [t_2^-, t_6^+] \times [s_2, s_3]}$  dont les 1-formes associées, basées par continuité, sont notées par  $(\beta_{t,s}, B_{t,s})_{(t,s) \in [t_2^-, t_6^+] \times [s_2, s_3]}$ . En  $s = s_3$ , elle vérifie :

- tout instant du chemin  $(\beta_{t,s_3})_{t \in [t_2^-, t_6^+]}$  ne présente qu'un seul couple de zéros  $p_{t,s_3}^1, q_{t,s_3}^1$  dont les relevés dans  $B_{t,s_3}$  sont déterminés par continuité à partir de  $P_{t_2^-, s_3}^1, Q_{t_2^-, s_3}^1$  et
- il existe un équipement  $L$ -transverse pour cette famille en  $s = s_3$ , noté par  $(\xi_{t,s_3})_{t \in [t_2^-, t_6^+]}$  tel que pour tout  $t \in [t_2^-, t_6^+]$ , l'intersection  $W^u(P_{t,s_3}^1) \cap W^s(Q_{t,s_3}^1)$  n'est constituée que d'une liaison positive  $\{(\ell_t, +)\}$ .

Les graphiques de Cerf-Novikov de la famille  $(\beta_{t,s})_{t \in [0, t_7^+]}$  associés à une valeur intermédiaire  $s = s'_2 \in ]s_2, s_3[$  et à  $s = s_3$  sont représentés dans la figure 3.22. La matrice de  $L$ -incidence en  $s = s_3$  est  $A_{t,s_3} = (1)$  pour tout  $t \in ]t_1, t_7[$ .

On souligne que l'étude de la traversée de la strate de queue d'aronde de l'espace des fonctions différentiables a été étudiée en détail dans [Ch, Chapitre 2]. On peut en général éliminer une

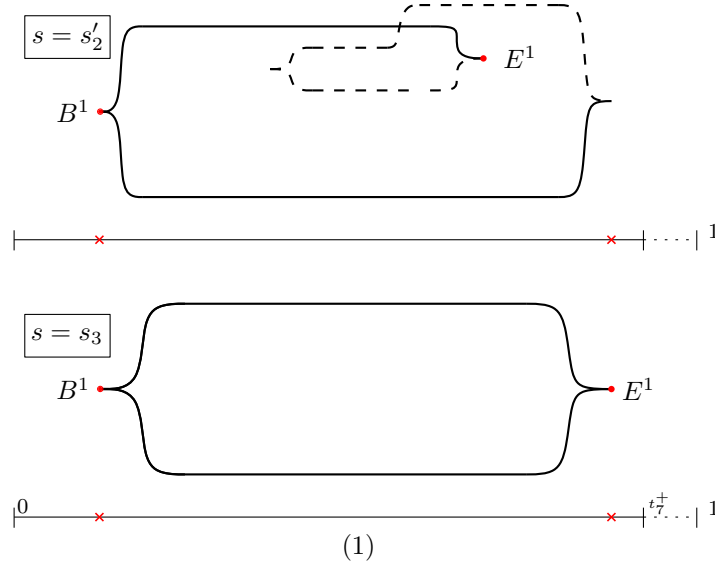


FIGURE 3.22 – Suppression d'une queue d'aronde élémentaire.

queue d'aronde descendante d'indice  $i+1$ , pas forcément élémentaire, dès que  $i \leq n-3$  (comparer à [HW, Ch. V, (0.2)]), mais on perd en général contrôle des liaisons présentes après l'élimination.

Quatrième modification. La graphique de Cerf-Novikov associé à la famille  $(\beta_{t,s_3})_{t \in [0, t_7^+]}$  est du type que l'on trouve dans le problème d'unicité des morts dans le contexte fonctionnel (voir [Ce, Ch. III, §2.4, Prop. 4] pour le cas simplement connexe et [CL, §1.4] pour le cas général); cette figure est appelée *lèvre*. Les familles de fonctions avec un graphique de Cerf de type lèvre, sont intimement liées avec le problème d'isotopie de fonctions sans point critique (voir [HW, Part II]) : en général, on ne peut pas trouver une déformation d'une telle famille à extrémités fixes qui vide le graphique. Cependant, une condition suffisante existe : l'existence d'une et une seule liaison allant de  $P_{t,s_3}^1$  vers  $Q_{t,s_3}^1$  sans autre accident intermédiaire pour tout  $t \in ]t_1, t_7[$  permet d'appliquer un procédé d'élimination de Smale à paramètre; une lèvre vérifiant cette condition est appelée *lèvre élémentaire*. La déformation sera stationnaire en dehors de  $[t_1 - \delta, t_7 + \delta] \times [s_3, 1]$  pour un  $\delta > 0$  petit.

Par construction de la famille de pseudo-gradients  $(\beta_{t,s_3})_{t \in [t_1, t_7]}$  nous pouvons prendre, pour tout  $t \in ]t_1, t_7[$  une constante  $c_t < h_t(Q_{t,s_3})$  telle que l'ensemble  $W_t$  des point d'adhérence de la variété instable tronquée  $W^u(P_{t,s_3}) \cap h_t^{-1}([c_t, +\infty[)$  rencontre  $\text{Crit}(h_t)$  seulement en  $P_{t,s_3}$  et  $Q_{t,s_3}$ . Les restrictions  $\pi|_{W_t}$  sont ainsi injectives et on peut prendre, pour tout  $t \in ]t_1, t_7[$ , des voisinages tubulaires  $U_t$  de  $W_t$  dans  $\widetilde{M}$ , assez petits pour que

- les seuls points critiques de  $h_t$  dans  $U_t$  sont les deux mentionnés et
- la projection  $\pi|_{U_t}$  soit toujours injective.

On peut appliquer le lemme [Lau1, Lemma 2.8] à la famille  $(h_{t,s_3}|_{U_t})_{t \in [0, t_7^+]}$  : on obtient une famille à deux paramètres  $(h_{t,s}|_{U_t})_{(t,s) \in [0, t_7^+] \times [s_3, 1]}$ , stationnaire en  $s$  pour des  $t$  proches de 0 et de  $t_7^+$ , telle que  $h_{t,1}|_{U_t}$  n'a aucun point critique pour tout  $t \in [0, t_7^+]$ . Cette déformation peut se faire de façon  $\pi_1 M$ -équivariante grâce à l'injectivité de la projection  $\pi$  sur les  $U_t$  : elle induit une famille à deux paramètres de 1-formes  $(\beta_{t,s})_{(t,s) \in [0, t_7^+] \times [s_3, 1]}$ . Par construction des primitives  $h_{t,1}$ ,

le chemin  $(\beta'_t := \beta_{t,1})_{t \in [0, t_7^+]}$  est formé de 1-formes fermées non-singulières et relie  $\beta_0$  à  $\beta_{t_7^+}$ .  $\square$

**Remarque 3.2.3.** On remarque que la famille à deux paramètres que nous avons exhibée est générique puisqu'elle ne traverse que les strates de codimension 0, 1 et 2. De plus, il n'y a qu'une seule valeur du paramètre où  $\beta_{t,s}$  est dans la strate de codimension 2, où elle présente un zéro de type queue d'aronde.

### 3.3 Greffe des lacets

Dans cette section, les chemins considérés sont à extrémités non-singulières.

#### 3.3.1 Coefficients directeurs et application de rencontre

Voyons une dichotomie sur les zéros de Morse :

**Définition 3.3.1.** Soit  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin basé à extrémités non-singulières. Soit  $r \in Z(\alpha_{t_0})$  de Morse. Le brin de son relevé  $R \in B_{t_0}$  provient d'une naissance  $B \in B^\alpha$  d'indice  $i$  comme dans 2.2.19. On dit que  $r$  ainsi que son relevé  $R$  est

- une source si  $\text{ind}(r) = i + 1$ .
- un puits si  $\text{ind}(r) = i$ .

Ainsi, si  $t$  est un temps de Morse, l'ensemble des relevés d'indice  $j$  admet une partition en sources et puits. On utilise souvent la lettre  $P$  pour désigner une source ainsi que la lettre  $Q$  pour désigner un puits.

Chaque relevé  $P_t$  d'un zéro de Morse d'indice  $i$  de  $\alpha_t$  détermine un brin  $\phi_{P_t}$ . L'ensemble des brins d'indice  $i$ , que l'on note par  $\tilde{\mathcal{B}}_i$ , peut être vu comme le quotient

$$\tilde{\mathcal{B}}_i := \{P_t \text{ relevé d'un zéro de Morse d'indice } i \text{ de } \alpha_t \mid t \in [0, 1]\} / \sim$$

où  $\sim$  désigne la relation d'équivalence  $P_t \sim Q_s$  si  $\phi_{P_t}(s) = Q_s$ . Le brin  $\phi_P$  est ainsi représenté par la classe de  $P$  par rapport à  $\sim$ , qui est notée  $[P]$ .

**Définition 3.3.2.** Soit  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin basé à extrémités non-singulières. On dit qu'un brin  $[P]$  est une source s'il est représenté par une source  $P$ . De même, on dit qu'un brin  $[Q]$  est un puits s'il est représenté par un puits  $Q$ . On a la partition de l'ensemble des brins d'indice  $i$  en sources et puits

$$\tilde{\mathcal{B}}_i = \tilde{\mathcal{S}}_i \sqcup \tilde{\mathcal{P}}_i.$$

On dit qu'un brin est distingué si son début appartient au choix de relevés  $B^\alpha$ . On note les sous-ensembles de brins, sources et puits distingués par  $\mathcal{B}, \mathcal{S}$  et  $\mathcal{P}$  respectivement. Si on note  $s_i := \sharp B_i^\alpha$  le cardinal de l'ensemble des naissances d'indice  $i$ , alors les ensembles des sources, puits et brins distingués d'indice  $i$  vérifient clairement

$$\sharp \mathcal{S}_i = s_{i-1} \quad , \quad \sharp \mathcal{P}_i = s_i \quad \text{et} \quad \sharp \mathcal{B}_i = s_i + s_{i-1}$$

**Remarque 3.3.3.** Soit  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin générique basé. On associe à tout relevé dans  $B_\bullet$  d'un zéro d'élimination d'indice  $i$ , noté  $E$ , deux brins  $[R] \in \mathcal{B}_{i+1}$  et  $[gS] \in \tilde{\mathcal{B}}_i$ , uniques dont la fin est  $E$ . La façon dont le choix continu de relevés est fait (voir 2.2.22) dit que les brins d'indice  $i + 1$  ainsi associés sont distingués.

**Lemme 3.3.4.** Soit  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin basé. Désignons par  $\mathcal{E}_{i+1}$  le sous-ensemble des brins distingués d'indice  $i + 1$  dont la fin est un relevé (d'un zéro d'élimination) d'indice  $i$  dans  $B_\bullet$  comme dans 3.3.3. On a l'égalité  $\sharp \mathcal{E}_{i+1} = \sharp \mathcal{S}_{i+1} = s_i$ .

*Démonstration.* Démontrons l'énoncé par récurrence finie. On commence par prendre  $N$  l'indice maximal parmi les indices des zéros de  $\alpha_\bullet$ . Les zéros d'indice  $N$  sont tous des sources, sinon  $N$  ne serait pas maximal. Ainsi  $\sharp \mathcal{B}_N = \sharp \mathcal{S}_N = s_{N-1}$ . Le chemin étant à extrémités non-singulières, tout brin aboutit à une élimination, et comme il n'y a pas des zéros d'indice  $N + 1$ , on a  $\mathcal{B}_N = \mathcal{E}_N$ , ce qui prouve l'énoncé pour l'indice maximal. Supposons maintenant l'énoncé démontré pour l'indice  $j + 1$  et démontrons-le pour l'indice  $j$ .

Considérons  $\mathcal{B}_j$  l'ensemble de brins distingués d'indice  $j$ . Par définition de  $\mathcal{E}_{j+1}$ , on sait qu'il y a exactement  $\sharp \mathcal{E}_{j+1}$  brins dans  $\mathcal{B}_j$  dont la fin est un point critique d'élimination d'indice  $j$ . Le reste des brins distingués d'indice  $j$ , dont le total est  $\sharp \mathcal{B}_j - \sharp \mathcal{E}_{j+1}$ , doivent ainsi s'éliminer avec des brins d'indice  $j - 1$ , vu que le chemin finit en une 1-forme non-singulière. Par définition des ensembles  $\mathcal{E}_*$ , ce reste des brins distingués coïncide avec  $\mathcal{E}_j$ . On retrouve ainsi l'égalité  $\sharp \mathcal{E}_j = \sharp \mathcal{B}_j - \sharp \mathcal{E}_{j+1}$ . La première et dernière des égalités suivantes découlent de la définition même des sources et puits (voir 3.3.2) et l'hypothèse de récurrence est employée dans la deuxième égalité :

$$\sharp \mathcal{B}_j - \sharp \mathcal{E}_{j+1} = (\sharp \mathcal{S}_j + \sharp \mathcal{P}_j) - \sharp \mathcal{E}_{j+1} = (\sharp \mathcal{S}_j + \sharp \mathcal{P}_j) - \sharp \mathcal{S}_{j+1} = \sharp \mathcal{S}_j$$

□

**Définition 3.3.5.** Soit  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin basé. Soit  $i$  un indice tel que  $s_i \geq 1$ , on a les objets suivants :

- l'ensemble de cardinal  $s_i$  des brins distingués d'indice  $i + 1$ , noté par  $\mathcal{E}_{i+1} \subseteq \mathcal{B}_{i+1}$ , qui participent à une élimination avec un brin d'indice  $i$ ,
- l'injection  $\rho_i : \mathcal{E}_{i+1} \rightarrow \mathcal{B}_i$  dite de rencontre, et l'application  $\delta_i : \mathcal{E}_{i+1} \rightarrow \pm \pi_1 M$  dite des coefficients directeurs, uniques telles que les brins  $[R] \in \mathcal{E}_{i+1}$  et  $\delta_i([R])\rho_i([R]) \in \tilde{\mathcal{B}}_i$  aient la même fin<sup>5</sup> (voir 3.3.3).

On dit que les brins distingués  $[R]$  et  $[S]$  se rencontrent si  $\rho_\bullet([R]) = [S]$ .

On dira que le graphique de Cerf-Novikov d'un tel chemin basé

- se ferme faiblement si

$$\text{Im}(\delta_i) \subseteq \pm \ker(u) \quad \text{pour tout indice } i \text{ où } s_i \geq 1,$$

- se ferme si

$$\delta_i \equiv 1 \quad \text{pour tout indice } i \text{ où } s_i \geq 1.$$

---

5. Le signe de l'application des coefficients directeurs indique le signe de l'intersection algébrique correspondante.

Ces applications nous permettent de définir une certaine classe de chemins basés :

**Définition 3.3.6.** *Un chemin basé  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  est dit sous forme normale s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1. *chaque brin d'indice  $i + 1$  de  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  rencontre le brin d'indice  $i$  avec lequel il est né,*
2. *le graphique de Cerf-Novikov associé à  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  se ferme.*

### 3.3.2 Greffe

Le but de cette section est de montrer qu'on peut toujours trouver un représentant sous forme normale (3.3.6) dans la classe d'homotopie relative d'un chemin de 1-formes d'extrémités non-singulières  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  à deux indices consécutifs loin des indices extrémaux. Pour ce faire on a besoin d'une opération, que nous appelons greffe. Elle a du sens pour des chemins à plusieurs indices.

Soit  $((\alpha_\bullet, B_\bullet^\alpha), (\beta_\bullet, B_\bullet^\beta))$  un couple ordonné de chemins basés à extrémités non-singulières et composables, c'est-à-dire  $\alpha_1 = \beta_0$ . La greffe de ce couple consiste à modifier le chemin composé  $\alpha_\bullet * \beta_\bullet$  par un lemme qui résulte d'appliquer l'unicité des naissances (2.2.14). Cette opération de greffe a besoin d'une prescription :

**Définition 3.3.7.** *Une prescription d'indice  $i$  est formée des données suivantes :*

1. *un sous-ensemble ordonné de sources distinguées  $\mathcal{G}_{i+1}^\beta \subseteq \mathcal{S}_{i+1}^\beta$  de cardinal vérifiant  $\#\mathcal{G}_{i+1}^\beta \leq \#\mathcal{E}_{i+1}^\alpha$ ,*
2. *une application injective, dite de choix  $\chi_i : \mathcal{G}_{i+1}^\beta \rightarrow \mathcal{E}_{i+1}^\alpha$ ,*
3. *une application, dite de localisation  $\lambda_i : \mathcal{G}_{i+1}^\beta \rightarrow \pm\pi_1 M$ .*

Ces trois données sont rassemblées dans l'application

$$\begin{array}{ccc} \gamma_i : \mathcal{G}_{i+1}^\beta & \longrightarrow & \pm\pi_1 M \cdot \mathcal{E}_{i+1}^\alpha \subset \pm\tilde{\mathcal{B}}_{i+1}^\alpha \\ [P] & \longmapsto & \lambda_i([P])\chi_i([P]) \end{array}$$

que nous appelons prescription d'indice  $i$  pour le couple ordonné de chemins basés  $((\alpha_\bullet, B_\bullet^\alpha), (\beta_\bullet, B_\bullet^\beta))$ .

Une prescription  $\gamma$  pour un tel couple est la donnée d'un ensemble de prescriptions  $\gamma_i$  ordonné par indices décroissants.

Dans le lemme ci-dessous, nous expliquons une application du théorème d'unicité des naissances 2.2.14 ; sur ce lemme repose la construction de la greffe 3.3.9.

**Lemme 3.3.8.** *Si  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  et  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$  sont deux chemins de naissance de même indice,*

*alors on peut trouver un chemin  $(\alpha_1^t)_{t \in [0,1]}$  tel que*

- $\alpha_1^0 = \alpha_1$  et  $\alpha_1^1 = \alpha'_1$ ,
- $\alpha_1^t$  est de Morse pour tout  $t \in [0, 1]$ .



*Démonstration.* On suppose les chemins de naissance centrés en  $t = \frac{1}{2}$  par commodité. On munit chaque chemin de bases  $B_\bullet^\alpha, B_\bullet^{\alpha'}$  et de primitives  $(h_t)_{t \in [0,1]}, (h'_t)_{t \in [0,1]}$ . Ces chemins sont modélisés par des cylindres  $(C_t)_{t \in [0,1]}$  et  $(C'_t)_{t \in [0,1]}$ . Une fois qu'une famille de cylindres a été donnée, il y a une seule de ses  $\pi_1 M$ -translatées telle que le cylindre  $gC_{\frac{1}{2}}$  contient le relevé du zéro de naissance  $B \in B^\alpha$  qui a été donné. On choisit les cylindres qui vérifient cette propriété pour le chemin de naissance  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ . On fait le choix analogue  $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ .

Désignons par  $\overline{\alpha}_\bullet$  le chemin parcouru dans le sens opposé et considérons la concaténation  $\beta(t, 0) := (\overline{\alpha}_\bullet * \alpha'_\bullet)_t$  parcourant toutes les 1-formes concernées dans l'intervalle  $[0, 1]$  que l'on munit des bases obtenues à partir de  $B^\alpha$  et  $B^{\alpha'}$ . Quitte à appliquer le procédé du lemme<sup>6</sup> de mise en évolution normale 3.1.3, on peut supposer que le graphique de Cerf-Novikov associé à  $\beta(t, 0)$ , de primitives  $(\overline{h}_\bullet * h'_\bullet)_{t \in [0,1]}$  contient la figure 3.23, c'est-à-dire, que tout autre relevé des zéros des Morse est loin des cylindres choisis. On a rapproché les cylindres dans le revêtement.

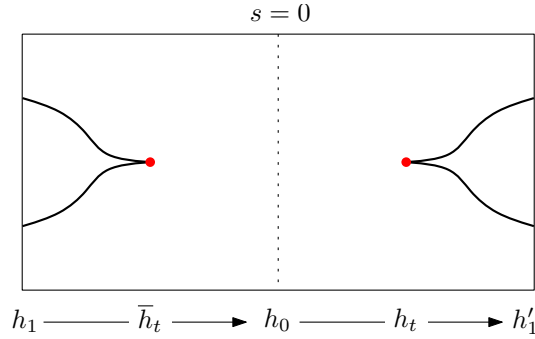


FIGURE 3.23 – Portion du graphique associé aux primitives de  $(\beta(t, 0))_{t \in [0,1]}$

Grâce à 2.2.14, on trouve une famille à un paramètre (paramètre  $s$ ) de chemins de naissance  $(\alpha_t^s)_{s \in [0,1]}$ , tous de même indice que les deux donnés, issus de  $\alpha_0$  et telle que

- $\alpha_t^0 = \alpha_t$  et  $\alpha_t^1 = \alpha'_t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ,
- pour chaque  $s \in [0, 1]$ , le chemin de naissance est centré en  $t = \frac{1}{2}$ .

Ainsi, la famille de 1-formes  $(\alpha_t^s)_{s \in [0,1]}$  vérifie les conditions demandées. L'homotopie à extrémités fixes entre les familles  $\beta(t, 0)$  et  $\beta(t, 1) := \alpha_t^1$  est réalisée par la famille  $(\beta(t, s))_{s \in [0,1]}$  indiquée dans le diagramme de la figure 3.24 dans l'espace fonctionnel  $\Omega_0^u \cup \Omega_1^u$ , où on voit aussi comment varient en fonction de  $s$  les portions des graphiques de Cerf-Novikov des primitives  $h(t, s)$  associées à la famille  $\beta(t, s)$ .  $\square$

**Construction 3.3.9.** À partir d'une prescription  $\gamma$  pour un couple ordonné de chemins basés  $((\alpha_\bullet, B_\bullet^\alpha), (\beta_\bullet, B_\bullet^\beta))$ , on construit le chemin  $\alpha_\bullet \bowtie_\gamma \beta_\bullet$ , que l'on nomme greffe de  $\alpha_\bullet$  avec  $\beta_\bullet$  par  $\gamma$ . Il est basé par un choix de relevés  $B^\gamma$  déterminé par  $B^\alpha, B^\beta$  et  $\gamma$ .

Considérons la concaténation  $(\alpha_\bullet * \beta_\bullet)_{t \in [0,2]}$ . Les choix de relevés  $B^\alpha$  et  $B^\beta$  déterminent un choix de relevés pour la concaténation donné par  $B^{\alpha*\beta} := B^\alpha \sqcup B^\beta$ . La greffe va être un

6. Nous rappelons qu'on suppose  $M$  de dimension grande, même si appliquer la technique d'avancer les naissances dans le temps du lemme 3.1.3 ne requiert que  $\dim M > 1$ .



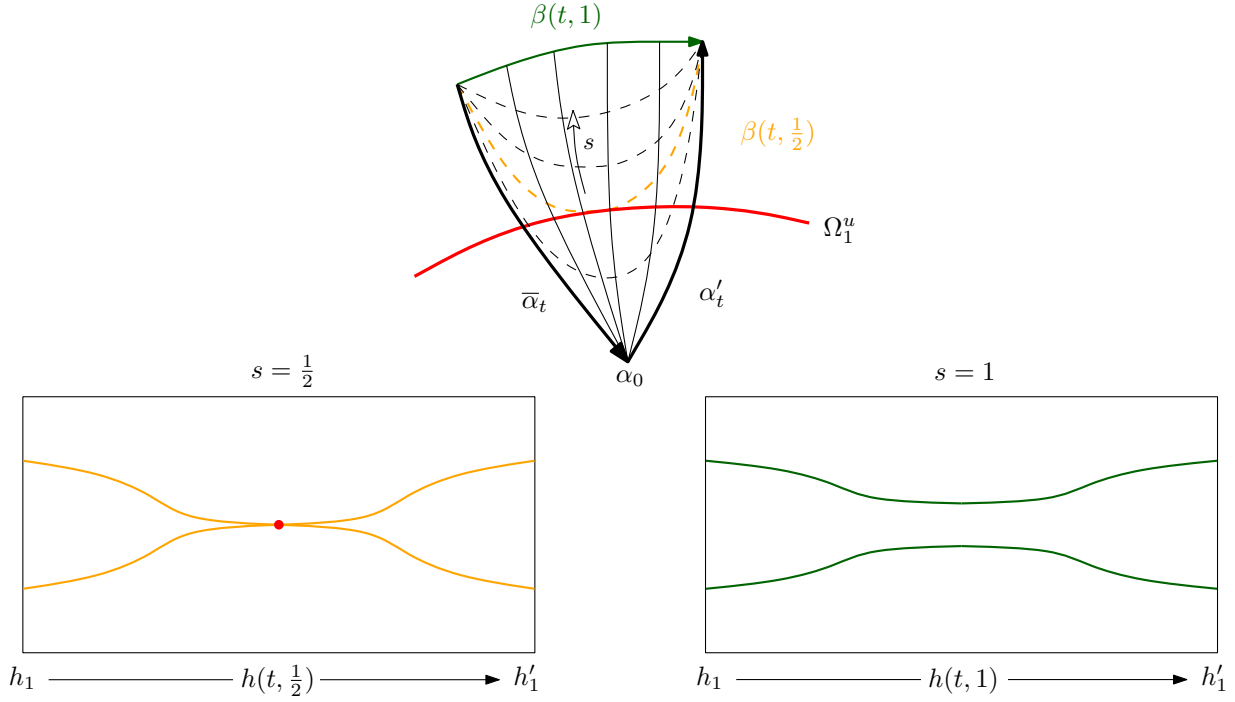


FIGURE 3.24 – Famille  $(\alpha_t^s)_{t \in [s, 0]}$  et portions des graphiques associés aux instants  $s = \frac{1}{2}, 1$  de la déformation.

chemin générique avec un choix de relevés  $B^\gamma \subseteq B^\alpha \sqcup B^\beta$  de cardinal  $\#B^\alpha + \#B^\beta - \sum_i \#\mathcal{G}_i^\beta$ . Plus précisément, le choix de relevés pour la greffe est

$$B^\gamma := B^\alpha \sqcup \left( B^\beta \setminus \left\{ B \in B^\beta \mid B \text{ est le début d'un brin dans } \cup_i \mathcal{G}_i^\beta \right\} \right).$$

Les zéros de naissance que nous enlevons de  $B^\beta$ , disparaissent par application itérée du lemme 3.3.8. À chaque fois qu'on veut se servir de cette application, il suffit de préciser les deux relevés des zéros de naissance/élimination concernés. Cette information est fournie par la prescription. Il est important de remarquer qu'un chemin d'élimination n'est, dans notre sens, qu'un chemin de naissance parcouru dans le sens opposé (voir 2.2.10).

On rend explicite l'effet pour la première source associée à la prescription ci-dessous.

Soit  $i$  l'indice maximal dans la prescription  $\gamma$ . Appelons  $B^1 \in B_i^\beta$  le début de la première source distinguée  $[P^1] \in \mathcal{G}_{i+1}$  donnée par  $\gamma_i$ . Le brin distingué  $[R]$  donné par le choix  $\chi_i([P^1])$  finit dans le relevé d'un zéro d'élimination de  $\alpha_\bullet$  que l'on note par  $E^1 \in B_\bullet^\alpha$ . Considérons le relevé du même zéro d'élimination donné par  $g_1 E^1$  où  $g_1 := \lambda_i([P^1])$  est l'image de  $[P^1]$  par la localisation. On remarque que  $g_1 E^1$  est la fin du brin  $\gamma_i([P^1])$ . On considère :

1. des cylindres  $(C_t)_{t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]}$  modelant le chemin de naissance  $(\beta_t)_{t \in [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]}$  centré en  $t_1 \in ]1, 2[$  tels que  $B^1 \in C_{t_1}$ ,
2. des cylindres  $(C'_t)_{t \in [t'_1 - \varepsilon, t'_1 + \varepsilon]}$  modelant le chemin d'élimination  $(\alpha_t)_{t \in [t'_1 - \varepsilon, t'_1 + \varepsilon]}$  centré en  $t'_1 \in ]0, 1[$  tel que  $g_1 E^1 \in C'_{t'_1}$ .

Soit  $t_0$  quelconque dans  $]t'_1, t_1[$ . Quitte à appliquer le procédé du lemme 3.1.3, on peut supposer que le chemin d'élimination finit en  $t_0$  et que le chemin de naissance est issu de  $t_0$ . On peut ainsi utiliser le lemme 3.3.8 pour trouver un chemin de mêmes extrémités que la concaténation  $(\alpha_\bullet * \beta_\bullet)_{t \in [0,2]}$ , et que l'on appelle  $\alpha_{\bullet, \gamma_i^1[P^1]} \beta_\bullet = \alpha_{\bullet, g_1[R]} \beta_\bullet$ , qui n'a changé qu'autour de  $(\alpha_\bullet * \beta_\bullet)_{t_0}$  comme dans 3.3.8. La façon dont les primitives associées ont changé se voit dans la figure 3.25.

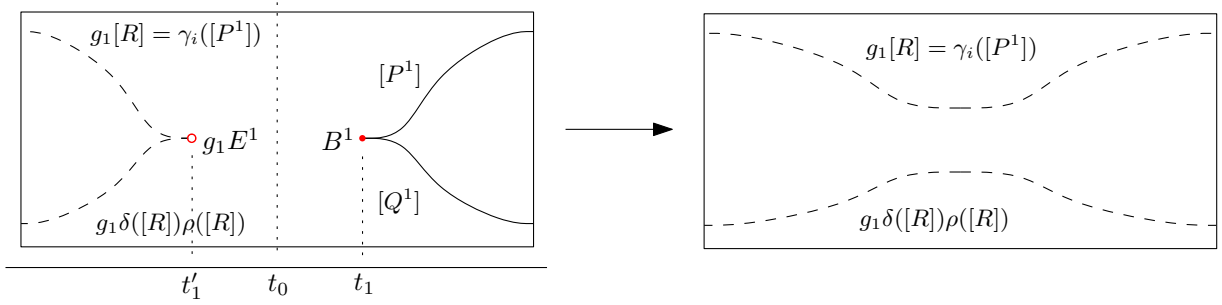


FIGURE 3.25 – Portions des graphiques autour de  $t_0$  avant/après la première prescription de  $\gamma_i$ .

Le relevé  $B^1$  a disparu et  $B^\alpha \sqcup (B^\beta \setminus \{B^1\})$  est le choix de relevés déterminé par  $B^\alpha, B^\beta$  et la première information fournie par la greffe  $\gamma$ . Le chemin basé  $\alpha_{\bullet, \gamma_i^1} \beta_\bullet$  s'obtient en itérant ce procédé dans l'ordre prescrit.  $\square$

Il est clair que la greffe altère les coefficients directeurs ainsi que l'application de rencontre ; on explique comment ils changent dans le lemme suivant sous certaines hypothèses. Plus tard, on va greffer des lacets  $(\beta_t)_{t \in [0,1]}$  qui vérifient ces hypothèses.

**Lemme 3.3.10.** *On utilise les données de la construction 3.3.9, les notations suivantes se déduisent de la figure 3.25. Soit  $[P^1] \in \mathcal{G}_{i+1}^\beta$  la première source distinguée de la prescription. Appelons  $[Q^1]$  le puits distingué qui naît avec  $[P^1]$ . Soient  $[R] := \chi_i([P^1]) \in \mathcal{E}_{i+1}^\alpha$  le choix et  $g_1 := \lambda_i([P^1])$  la localisation donnés par la prescription. Supposons que*

- $[P^1] \in \mathcal{E}_{i+1}^\beta$ , autrement dit, qu'il s'élimine avec un brin d'indice  $i$ ,
- $[Q^1] \notin \mathcal{E}_i^\beta$ , autrement dit, qu'il s'élimine avec un brin d'indice  $i+1$ ,
- $[P^1]$  ne rencontre pas  $[Q^1]$ . Soit donc  $[P^1] \neq [R^l] \in \mathcal{E}_{i+1}$  tel que  $\rho([R^l]) = [Q^1]$ .

Notons par  $\delta := \delta^\alpha \sqcup \delta^\beta : \mathcal{E}_{i+1}^\alpha \sqcup \mathcal{E}_{i+1}^\beta \rightarrow \pm\pi_1 M$ ,  $\rho := \rho^\alpha \sqcup \rho^\beta : \mathcal{E}_{i+1}^\alpha \sqcup \mathcal{E}_{i+1}^\beta \rightarrow \mathcal{B}_i^\alpha \sqcup \mathcal{B}_i^\beta$  les coefficients directeurs et la rencontre de la concaténation  $\alpha_\bullet * \beta_\bullet$ . Si on note par  $\delta_G, \rho_G$  les coefficients directeurs et la rencontre après avoir effectué la première opération  $\gamma_i^1$  de la première prescription de la greffe, les seules modifications de  $\delta_G, \rho_G$  par rapport à  $\delta, \rho$  sont les suivantes :

- $\delta_G : \mathcal{E}_{i+1}^\alpha \sqcup (\mathcal{E}_{i+1}^\beta \setminus \{[P^1]\}) \rightarrow \pm\pi_1 M$ ,
- $\rho_G : \mathcal{E}_{i+1}^\alpha \sqcup (\mathcal{E}_{i+1}^\beta \setminus \{[P^1]\}) \rightarrow \mathcal{B}_i^\alpha \sqcup (\mathcal{B}_i^\beta \setminus \{[Q^1]\})$ ,
- $\delta_G([R]) = g_1^{-1}\delta([P^1])$  et  $\rho_G([R]) = \rho([P^1])$ ,
- $\delta_G([R^l]) = \delta([R^l])g_1\delta([R])$  et  $\rho_G([R^l]) = \rho([R])$ .

*Démonstration.* Le brin distingué  $[P^1]$  devient le brin  $g_1[R]$  comme on déduit de 3.3.8. Par  $\pi_1 M$ -équivalence, ceci veut dire que si on suit par continuité le brin  $[R]$  après l'opération, on

arrive où  $g_1^{-1}[P^1]$  arrivait. Autrement dit, la nouvelle rencontre de  $[R]$  est la rencontre que  $[P^1]$  avait, et le nouveau coefficient directeur de  $[R]$  est celui de  $[P^1]$  pré-multiplié par  $g_1^{-1}$ . La figure 3.26 illustre ce changement. Ceci donne les formules

$$\delta_G([R]) = g_1^{-1}\delta([P^1]) \quad \text{et} \quad \rho_G([R]) = \rho([P^1]).$$

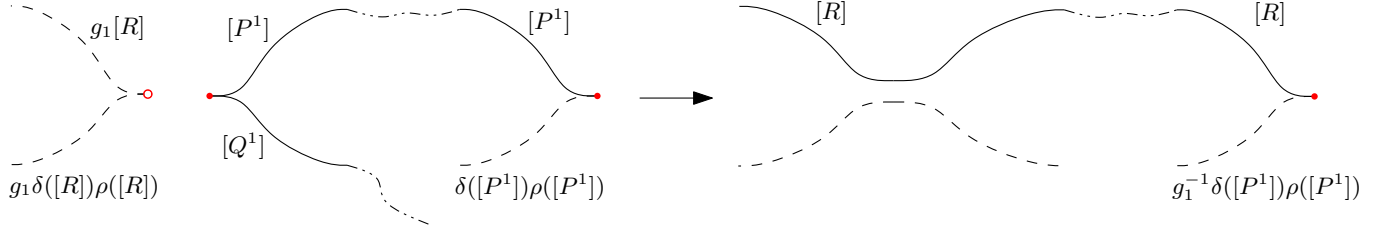


FIGURE 3.26 – Effet d’une opération de greffe vu sur le brin distingué  $[R]$ .

Le brin distingué  $[Q^1]$  est devenu le brin  $g_1\delta([R])\rho([R])$ . Ainsi, le brin qui rencontrait  $[Q^1]$  et que nous avons nommé  $[R^l]$ , doit rencontrer la rencontre de  $[R]$  après l’opération. Le nouveau coefficient directeur de  $[R^l]$  sera alors le  $h \in \pm\pi_1 M$  tel que les brins  $h\rho([R])$  et  $\delta([R^l])[Q^1]$  s’unissent en réalisant la greffe. On déduit que  $h = \delta([R^l])g_1\delta([R])$  et faisant une translation par  $\delta([R^l])$  du premier graphique dans la figure 3.26. La figure 3.27 illustre les formules

$$\delta_G([R^l]) = \delta([R^l])g_1\delta([R]) \quad \text{et} \quad \rho_G([R^l]) = \rho([R]).$$

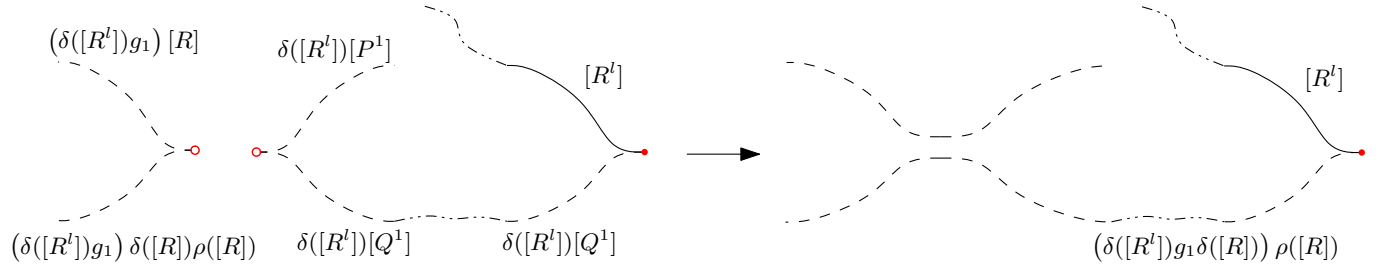


FIGURE 3.27 – Effet de la même opération vu sur le brin distingué  $[R^l]$ .

□

On remarque que, après avoir effectué toutes les opérations d’une prescription  $\gamma_i$  d’indice  $i$ , le domaine des applications coefficients directeurs et de rencontre sera  $\mathcal{E}_{i+1}^\alpha \sqcup \left( \mathcal{E}_{i+1}^\beta \setminus \mathcal{G}_{i+1}^\beta \right)$ .

**Théorème 3.3.11.** *Soit  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  un chemin à extrémités non-singulières et à deux indices  $i, i+1$ , où  $1 < i < n-1$ . Alors il existe un chemin basé  $(\tilde{\alpha}_t, B_t^\alpha)_{t \in [0,1]}$  à deux indices  $i, i+1$  et de mêmes extrémités que  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  qui est aussi sous forme normale.*

*Démonstration.* Appelons  $s$  la quantité des naissances du chemin et prenons n'importe quel choix de relevés  $B^\alpha$  pour  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ . On considère la taille  $T := T_{B_\bullet} > 0$  associée au choix continu de relevés qui en découle. Quitte à appliquer la proposition 3.1.20, grâce au fait que  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  ne présente pas de centre, on peut prendre  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  d'évolution  $L$ -normale, où  $L$  est choisi tel que  $L > (s-1)T$ .

Soit ainsi  $(\xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  un équipement  $L$ -transverse pour  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  le rendant d'évolution  $L$ -normale. Regardons  $A$  la matrice de  $L$ -incidence dans un instant de pré-élimination. Comme  $L$  a été pris plus grand que  $(s-1)T$ , la proposition 3.1.22 s'applique. Avec les mêmes notations que dans la proposition citée, on écrit la matrice  $A = P_\sigma D$ . Les coefficients  $g_k \in \pm\pi_1 M$  de la matrice diagonale  $D$  vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout  $k \in \{1, \dots, s\}$  on a  $|u(g_k)| < L$ ,
- le déterminant  $\pm \det(D)$  est dans  $[\pi_1 M, \pi_1 M]$ .

Comme  $(\alpha_t, \xi_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  est d'évolution  $L$ -normale, nous pouvons lire les coefficients directeurs et l'application rencontre associés au chemin basé  $(\alpha_t, B_t)_{t \in [0,1]}$  à partir de la matrice  $A$ . Si  $P_\sigma$  désigne la matrice  $(P_\sigma)_{jk} = \delta_{\sigma(j)k}$  où le seul terme non-nul dans la  $j$ -ème ligne est le  $\sigma(j)$ -ème, l'application de rencontre vérifie :

$$\begin{array}{ccc} \rho : \mathcal{B}_{i+1} & \longrightarrow & \mathcal{B}_i \\ [P^j] & \longmapsto & [Q^{\sigma(j)}] \end{array}$$

où on signale que  $\mathcal{E}_{i+1}$ , l'ensemble de brins distingués d'indice  $i+1$  qui s'éliminent avec des brins d'indice  $i$ , coïncide avec  $\mathcal{B}_{i+1}$  vu qu'il n'y a pas des zéros d'indice supérieur à  $i+1$ . En particulier  $\rho$  est une bijection. Pour  $j \in \{1 \dots s\}$ , on note  $g_j := \delta([P^j])$ , qui est par ailleurs le seul terme non nul de la  $j$ -ème ligne de  $A$ . On remarque qu'avec ces notations  $D = \text{diag}(g_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, g_{\sigma^{-1}(s)})$ .

Si  $A = \text{Id}$ , le théorème est démontré, puisque  $\sigma = \text{id}$  et chaque brin  $[P^j]$  rencontre le brin  $[Q^j]$  avec lequel il était né. De plus, le graphique de Cerf-Novikov se ferme vu que  $\delta([P^j]) = 1$  pour tout  $j \in \{1 \dots s\}$ .

Si  $s = 1$ , le seul coefficient de  $A = (g_1)$  ne peut être que 1. En effet, les glissements du chemin équipé que nous avons considéré ne peuvent être que des auto-glissements. Ainsi, la matrice  $(g_1)$  est une troncature  $\text{tr}_L$ ,  $L > 0$ , d'un produit de termes dans  $1 + (\nu < 0) \in \mathbb{Z}[\pi_1 M]$ . Un tel élément contient forcément 1 dans son support, mais  $\text{supp}(g_1) = \{g_1\}$ .

Si  $s \geq 2$ , on va se ramener à  $A = \text{Id}$  de proche en proche, ce qui achèvera de prouver le théorème.

**AFFIRMATION :** il existe

- une collection finie de lacets en queue d'aronde d'indice  $i$  d'origine  $\alpha_1$ , notée par  $(\beta_\bullet^j)_{j=1}^m$
- et une collection de prescriptions d'indice  $i$  notées par  $(\gamma^j)_{j=1}^m$ ,

de sorte que le chemin résultant de la greffe itérée

$$\tilde{\alpha}_\bullet := (\dots ((\alpha_\bullet \frown_{\gamma^1} \beta_\bullet^1) \frown_{\gamma^2} \beta_\bullet^2) \dots \frown_{\gamma^m} \beta_\bullet^m)$$

admet aussi  $B^\alpha$  comme choix de relevés et dont la matrice de pré-élimination est l'identité.

On distingue deux cas initiaux :

Premier cas :  $\sigma(1) \neq 1$ . Posons  $\sigma(1) = k$ ; on s'intéresse au brin  $[P^j]$  qui rencontre  $[Q^1]$ , où  $j \neq 1$ . La matrice de  $L$ -incidence a la forme suivante :

$$A = \begin{matrix} & \text{Col. } k\text{-ème} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ g_j & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} & \text{Ligne } j\text{-ème} \end{matrix}$$

Comme  $i$  est loin des extrêmes et que  $|u(g_1^{-1})| = |u(g_1)| < L$ , la proposition 3.2.1 fournit un lacet  $(\beta_t^1)_{t \in [0,1]}$  d'indice  $i$  d'origine  $\alpha_1$  dont la matrice de  $L$ -incidence à un instant de pré-élimination est  $\begin{pmatrix} 0 & -g_1 \\ g_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ . On appelle  $[R^1], [R^2]$  les sources et  $[S^1], [S^2]$  les puits distingués issus des deux naissances du lacet  $(\beta_t^1)_{t \in [0,1]}$ . Les applications de rencontre et des coefficients directeurs associées au lacet sont

$$\begin{cases} \rho([R^1]) = [S^2], & \rho([R^2]) = [S^1] \\ \delta([R^1]) = -g_1 & \delta([R^2]) = g_1^{-1} \end{cases}$$

On greffe le lacet  $(\beta_t^1)_{t \in [0,1]}$  à  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  avec la prescription  $\gamma^1$  d'indice  $i$  donnée par :

$$\gamma^1 \equiv \begin{cases} \mathcal{G}_{i+1}^\beta = \mathcal{S}_{i+1}^\beta = \{[R^1], [R^2]\} \\ \chi_i([R^1]) = [P^1] & \text{et} & \chi_i([R^2]) = [P^j] \\ \lambda_i([R^1]) = 1 & \text{et} & \lambda_i([R^2]) = -g_1^{-1}g_j^{-1} \end{cases}$$

Dans la suite, on note ce type des greffes par le couple ordonné  $(1[P^1], -g_1^{-1}g_j^{-1}[P^j])$ , où on a fait la convention d'ordonner l'ensemble  $\mathcal{G}_{i+1}^\beta$  de la même façon que les bases associées aux brins d'indice  $i+1$ . Voyons l'effet entraîné par chaque opération dans la greffe.

Les brins  $[R^1], [S^1]$  associés à la première donnée de la prescription vérifient les hypothèses du lemme 3.3.10, et  $[R^2]$  est le brin qui rencontre  $[S^1]$ . La localisation donnée par la prescription est  $1 \in \pm\pi_1 M$  et le brin choisi pour la greffe est  $[P^1]$ . Les coefficients directeurs et la rencontre du chemin  $\alpha_{\bullet(1[P^1])}\beta_\bullet^1$ , que l'on note par  $\delta_G$  et  $\rho_G$ , ne diffèrent de  $\delta$  et  $\rho$  que pour les brins  $[P^1]$  et  $[R^2]$ ; en appliquant les formules du lemme mentionné on a :

$$\begin{cases} \delta_G([P^1]) = 1^{-1} \cdot \delta([R^1]) = -g_1, & \rho_G([P^1]) = \rho([R^1]) = [S^2] \\ \delta_G([R^2]) = \delta([R^2]) \cdot 1 \cdot \delta([P^1]) = g_1^{-1} \cdot 1 \cdot g_1 = 1, & \rho_G([R^2]) = \rho([P^1]) = [Q^k] \end{cases}$$

Les brins  $[R^2], [S^2]$  associés à la deuxième donnée de la prescription vérifient aussi les hypothèses du lemme 3.3.10, et  $[P^1]$  est le brin qui rencontre  $[S^2]$  comme on déduit des formules juste ci-dessus. La localisation donnée par la prescription est  $-g_1^{-1}g_j^{-1} \in \pm\pi_1 M$  et le brin choisi pour la greffe est  $[P^j]$ . En appliquant de nouveau le lemme, les coefficients directeurs et la rencontre du chemin  $\alpha_{\bullet\gamma^1}\beta_\bullet^1$  n'ont varié par rapport à  $\delta_G$  et  $\rho_G$  que pour les brins  $[P^j]$  et  $[P^1]$ . Si on note ces nouvelles applications par  $\delta'_G$  et  $\rho'_G$ , on a :

$$\begin{cases} \delta'_G([P^j]) = (-g_1^{-1}g_j^{-1})^{-1} \cdot \delta_G([R^2]) = -g_jg_1, & \rho'_G([P^j]) = \rho_G([R^2]) = [Q^k] \\ \delta'_G([P^1]) = \delta_G([P^1])(-g_1^{-1}g_j^{-1})\delta_G([P^j]) = (-g_1)(-g_1^{-1}g_j^{-1})(g_j) = 1, & \rho'_G([P^1]) = \rho_G([P^j]) = [Q^1] \end{cases}$$

Le résultat de la greffe  $\alpha_{\bullet} \gamma^1 \beta_{\bullet}^1$  est un chemin basé par  $B^\alpha$  et d'évolution normale. Les coefficients directeurs et l'application rencontre associés sont représentés par la matrice

$$A_1 = \begin{matrix} & \text{Col. } k\text{-ème} & \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -g_j g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} & \text{Ligne } j\text{-ème} \end{matrix}$$

qui est identique à  $A$  sauf pour les lignes 1 et  $j$ . On remarque que l'effet sur la rencontre et les coefficients directeurs dans sa version matricielle revient à la multiplication à droite par une matrice construite à partir de celle associée au lacet  $(\beta_{\bullet}^1)_{t \in [0,1]}$  :

$$A_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -g_1 & 0 \\ 0 & \text{Id}_{k-2} & 0 & 0 \\ g_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Id}_{s-k} \end{pmatrix}$$

Deuxième cas :  $\sigma(1) = 1$ . On va se ramener au premier cas. Comme  $s \geq 2$ , choisissons  $j \neq 1$  et appelons  $[Q^k] := \rho([P^j])$  ; il est clair que  $k \neq 1$ . La matrice de  $L$ -incidence a la forme suivante :

$$A = \begin{matrix} & \text{Col. } k\text{-ème} & \\ \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & g_j & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} & \text{Ligne } j\text{-ème} \end{matrix}$$

Comme  $i$  est loin des extrêmes et on a  $|u(-g_1)| = |u(g_1)| < L$ , on prend un lacet  $(\beta_t^1)_{t \in [0,1]}$  d'indice  $i$  d'origine  $\alpha_1$ , dont la matrice de  $L$ -incidence à un instant de pré-élimination est  $\begin{pmatrix} 0 & g_1^{-1} \\ -g_1 & 0 \end{pmatrix}$ . Avec les mêmes notations que dans le premier cas, les applications de rencontre et des coefficients directeurs associées au lacet sont

$$\begin{cases} \rho([R^1]) = [S^2], & \rho([R^2]) = [S^1] \\ \delta([R^1]) = g_1^{-1} & \delta([R^2]) = -g_1 \end{cases}$$

En suivant la même convention que dans le premier cas, on donne la prescription d'indice  $i$  pour greffer le lacet  $(\beta_t^1)_{t \in [0,1]}$  à  $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$  par le couple ordonné  $\gamma^1 \equiv (1[P^1], g_1 g_j^{-1} [P^j])$ . Faisons les calculs en utilisant à nouveaux le lemme 3.3.10.

La localisation et le choix donnés par la première donnée de  $\gamma^1$  coïncident avec ceux du premier cas. Les nouvelles applications  $\delta_G$  et  $\rho_G$  pour  $\alpha_{\bullet} (1[P^1]) \beta_{\bullet}^1$  n'ont varié que pour les brins  $[P^1]$  et  $[R^2]$  et on a :

$$\begin{cases} \delta_G([P^1]) = 1^{-1} \cdot \delta([R^1]) = g_1^{-1}, & \rho_G([P^1]) = \rho([R^1]) = [S^2] \\ \delta_G([R^2]) = \delta([R^2]) \cdot 1 \cdot \delta([P^1]) = (-g_1) \cdot 1 \cdot g_1 = -g_1^2, & \rho_G([R^2]) = \rho([P^1]) = [Q^1] \end{cases}$$

Les brins  $[R^2], [S^2]$  associés à la deuxième donnée de la prescription vérifient les hypothèses du lemme 3.3.10 et  $[P^1]$  est le brin qui rencontre  $[S^2]$ . La localisation donnée par la prescription est  $g_1 g_j^{-1} \in \pm \pi_1 M$  et le brin choisi pour la greffe est  $[P^j]$ . Les nouveaux coefficients directeurs  $\delta'_G$  et la rencontre  $\rho_G$  du chemin  $\alpha_{\bullet, \gamma^1} \beta_{\bullet}^1$  sont ceux de  $\delta_G$  et  $\rho_G$  sauf pour les brins  $[P^j]$  et  $[P^1]$ , dont la modification est donnée par :

$$\begin{cases} \delta'_G([P^j]) = (g_1 g_j^{-1})^{-1} \cdot \delta_G([R^2]) = g_j g_1^{-1} (-g_1^2) = -g_j g_1, & \rho'_G([P^j]) = \rho_G([R^2]) = [Q^1] \\ \delta'_G([P^1]) = \delta_G([P^1]) (-g_1^{-1} g_j^{-1}) \delta_G([P^j]) = (g_1^{-1}) (g_1 g_j^{-1}) (g_j) = 1, & \rho'_G([P^1]) = \rho_G([P^j]) = [Q^k] \end{cases}$$

Comme dans le premier cas, le résultat de la greffe  $\alpha_{\bullet, \gamma^1} \beta_{\bullet}^1$  est d'évolution normale basé par  $B^\alpha$ . Les coefficients directeurs et l'application rencontre de ce chemin sont représentés par la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -g_j g_1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & * \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{Col. } k\text{-ème} \\ \\ \text{Ligne } j\text{-ème} \end{matrix}$$

qui est identique à  $A$  sauf pour les lignes 1 et  $j$ , qui nous ramène au premier cas. On remarque que l'effet matriciel sur la rencontre et les coefficients directeurs revient aussi à la multiplication à droite par la matrice que l'on déduit de celle associée au lacet  $(\beta_{\bullet}^1)_{t \in [0,1]}$  :

$$A_1 = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1^{-1} & 0 \\ 0 & \text{Id}_{k-2} & 0 & 0 \\ -g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Id}_{s-k} \end{pmatrix}$$

Après une ou deux greffes, en fonction du cas initial, nous nous sommes ramenés sur un chemin de mêmes extrémités que l'original, où les brins distingués  $[P^1], [Q^1]$  issus de la première naissance se rencontrent avec coefficient directeur égal à 1, et où un certain brin  $[P^j], j > 1$  voit son coefficient directeur multiplié à droite par  $\pm g_1$ , où  $g_1$  était l'ancien coefficient directeur de  $[P^1]$ .

Nous itérons le raisonnement  $(s-1)$  fois. Il est clair que à la  $r$ -ème itération, les brins  $\{[P^m], [Q^m]\}_{1 \leq m < r}$  ne sont plus concernés par la prescription ou couple de prescriptions  $\gamma^r$  de cette itération. Désignons  $\rho'_G$  et  $\delta'_G$  les applications de rencontre et des coefficients directeurs à la fin de la  $r$ -ème itération, et  $\rho, \delta$  celles à la fin de l'étape précédente. Elles coïncident sauf pour  $[P^r]$  et un unique  $[P^j]$  où  $r < j \leq s$ , de sorte que :

$$\begin{cases} \rho'_G([P^r]) = [Q^r] & \delta'_G([P^r]) = 1 \\ \rho'_G([P^j]) = [Q^k] & \delta'_G([P^j]) = \pm \delta([P^j]) \delta([P^r]) \end{cases}$$

pour un certain  $[Q^k]$  où  $r < k \leq s$ .

Après les  $(s - 1)$  itérations, on a  $\rho([P^j]) = [Q^j]$  pour tout  $j = 1, \dots, s - 1$ , donc a posteriori  $\rho([P^s]) = [Q^s]$ . De plus, tous les coefficients directeurs sont égaux à 1 sauf le dernier, qui est devenu un produit désordonné des coefficients directeurs initiaux. La représentation matricielle est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_{s-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon \prod_{i=1}^s g_{\tau(i)} \end{pmatrix}$$

où  $\tau \in \mathfrak{S}_s$  est une certaine permutation de même signature que  $\sigma$  et  $\varepsilon := (-1)^{\text{sig}(\tau)}$ . On remarque que le signe  $\pm$  qui affecte  $\det(D)$  est  $(-1)^{\text{sig}(\sigma)}$  comme on a écrit dans la preuve de la proposition 3.1.22 et coïncide alors avec  $\varepsilon$ . Dans le reste de la preuve, on explique comment on peut se ramener à une situation où le dernier coefficient directeur est aussi 1 grâce à des certaines greffes supplémentaires.

Deux produits  $\prod_{i=1}^s g_{\tau_1(i)}$  et  $\prod_{i=1}^s g_{\tau_2(i)}$  pour deux permutations  $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{S}_s$  ne diffèrent que d'un produit de commutateurs de  $\pi_1 M$ . Ainsi, il existe un  $h \in [\pi_1 M, \pi_1 M]$  tel que

$$\varepsilon \prod_{i=1}^s g_{\tau(i)} = \varepsilon h \prod_{i=1}^s g_{\sigma^{-1}(i)} = h \cdot (\pm \det(D)) .$$

Mais comme  $\pm \det(D)$  est aussi un produit de commutateurs, on peut écrire l'égalité

$$\varepsilon \prod_{i=1}^s g_{\tau(i)} = \prod_{i=1}^p [h_{p1}, h_{p2}]$$

pour certains  $h_{p1}, h_{p2} \in \pi_1 M$ . Ce point est crucial pour finir notre argument. La factorisation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [h_1, h_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^{-1} & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2^{-1} & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 h_1 & 0 \\ 0 & h_1^{-1} h_2^{-1} \end{pmatrix}$$

ainsi que la suivante

$$\begin{pmatrix} h^{-1} & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h^{-1} \\ -h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

permettent d'écrire chaque commutateur comme le résultat de six matrices comme celles des lacets en queue d'aronde. Il suffit de greffer un lacet pour chaque matrice dans la décomposition du produit des commutateurs ; les choix des prescriptions associées ne concernent que les brins  $[P^{s-1}]$  et  $[P^s]$ .  $\square$





# Annexe A

## Anneaux filtrés

### A.1 Complétions par rapport à une métrique ou une filtration

**Définition A.1.1.** Une filtration continue décroissante d'un groupe  $\Lambda$  est une suite  $\mathfrak{F} = (\Lambda_i)_{i \in \mathbb{R}}$  de sous-groupes de  $\Lambda$  telle que  $\Lambda_i \supseteq \Lambda_j$  si  $i < j$ .

La filtration est dite exhaustive si le sous-groupe  $\bigcup_{i \in \mathbb{R}} \Lambda_i$  coïncide avec  $\Lambda$ .

On dit qu'elle est séparable si le sous-groupe  $\bigcap_{i \in \mathbb{R}} \Lambda_i$  est réduit à  $\{0\}$ .

On rappelle la notation  $G_u^{\geq C} := \{g \in G \mid u(g) \geq C\}$  introduite en 1.1.1, où  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  est un morphisme de groupes que nous fixons pour la suite. On note ces sous-ensembles de  $G$  par  $G^{\geq C}$  simplement.

**Lemme A.1.2.** Les sous-ensembles  $\mathbb{Z}[G]_i := \{\lambda \in \mathbb{Z}[G] \mid \text{supp}(\lambda) \subseteq G^{\geq i}\}$  où  $i \in \mathbb{R}$  définissent une filtration continue décroissante de l'anneau  $\Lambda = \mathbb{Z}[G]$ . Cette filtration, que l'on nomme  $u$ -filtration de  $\mathbb{Z}[G]$ , est exhaustive et aussi séparable.

*Démonstration.* Comme  $\text{supp}(0) = \emptyset$ ,  $0 \in \mathbb{Z}[G]_i$  pour tout  $i \in \mathbb{R}$ . Si  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}[G]_i$ , comme  $\text{supp}(\mu) = \text{supp}(-\mu)$  nous avons que  $\text{supp}(\lambda - \mu) \subseteq \text{supp}(\lambda) \cap \text{supp}(-\mu) \subseteq G^{\geq i}$  et tout  $\mathbb{Z}[G]_i$  est un sous-groupe de  $\mathbb{Z}[G]$ . Il est clair que si  $i < j$ , alors  $\mathbb{Z}[G]_i \supseteq \mathbb{Z}[G]_j$ .

Comme  $\bigcup_{i \in \mathbb{R}} G^{\geq i} = G$  et  $\bigcap_{i \in \mathbb{R}} G^{\geq i} = \emptyset$ , on obtient la dernière affirmation.  $\square$

**Définition A.1.3.** Soit  $(\Lambda, +, \cdot, 1_\Lambda)$  un anneau unitaire. On dit qu'une filtration continue  $\mathfrak{F} = (\Lambda_i)_{i \in \mathbb{R}}$  du groupe additif sous-jacent  $(\Lambda, +)$  est compatible avec la structure d'anneau si

1.  $\Lambda_i \cdot \Lambda_j \subseteq \Lambda_{i+j}$  pour tous  $i, j \in \mathbb{R}$ ,
2.  $1_\Lambda \in \Lambda_0$ .

Dans ce cas, l'anneau  $\Lambda$  équipé avec cette filtration est dit anneau filtré continûment.

**Lemme A.1.4.** L'anneau  $(\mathbb{Z}[G], (\mathbb{Z}[G]_i)_{i \in \mathbb{R}})$  de A.1.2 est un anneau filtré continûment.

*Démonstration.* Dans ce cas,  $1_{\mathbb{Z}[G]} = 1 \cdot e$  où  $e$  désigne l'élément neutre de  $G$ . Ainsi  $\text{supp}(1_{\mathbb{Z}[G]}) = \{e\}$ . Comme  $u$  est un morphisme de groupes, on a  $u(e) = 0$  et  $1 \in \mathbb{Z}[G]_0$ . Comme on avait

remarqué dans 1.1.2 on a  $\text{supp}(\lambda \cdot \mu) \subseteq \text{supp}(\lambda) \cdot \text{supp}(\mu)$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}[G]$ . Prenons  $\lambda \in \mathbb{Z}[G]_i$  et  $\mu \in \mathbb{Z}[G]_j$ . Un élément du support de  $\lambda \cdot \mu$  s'écrit sous la forme  $gh$  où  $g \in \text{supp}(\lambda)$  et  $h \in \text{supp}(\mu)$ . Mais  $u(gh) = u(g) + u(h) \geq i + j$  et on a prouvé aussi la première condition de la définition A.1.3.  $\square$

**Remarque A.1.5.** Les ensembles  $\Lambda_i, i \neq 0$  d'un anneau filtré (continûment ou dans le sens usuel)  $\Lambda$  ne sont pas des sous-anneaux en général : les conditions  $\Lambda_i \cdot \Lambda_i \subseteq \Lambda_i$  ou  $1_\Lambda \in \Lambda_i$  peuvent ne pas être vérifiées. Si la filtration est décroissante,  $\Lambda_i$  est un sous-ensemble multiplicatif de  $\Lambda$  pour tout  $i \geq 0$ , puisque  $\Lambda_{2i} \subseteq \Lambda_i$  si  $i \leq 2i$ .

Plaçons-nous dans le contexte du lemme A.1.2. D'une part, si  $i < 0$  et  $\emptyset \neq \mathbb{Z}[G]_0 \setminus \mathbb{Z}[G]_i = \{\lambda, \dots\}$ , alors  $\mathbb{Z}[G]_i$  n'est pas multiplicatif vu que  $\lambda^2 \notin \mathbb{Z}[G]_i$ . D'autre part,  $1 \notin \mathbb{Z}[G]_i$  pour tout  $i > 0$  : les seuls sous anneaux sont donc les  $\mathbb{Z}[G]_i, i \leq 0$  tels que  $\mathbb{Z}[G]_i = \mathbb{Z}[G]_0$ .

Pour nos propos, il est suffisant de considérer des filtrations *classiques* (indexées par  $\mathbb{Z}$  au lieu de par  $\mathbb{R}$ ). Un anneau  $\Lambda$  filtré continûment par  $\mathfrak{F} = (\Lambda_i)_{i \in \mathbb{R}}$  admet de façon naturelle des filtrations classiques indexées par  $\varepsilon\mathbb{Z}$  pour tout  $\varepsilon > 0$ . Nous notons  $\mathfrak{F}_\varepsilon$  ces filtrations (classiques) induites par  $\mathfrak{F}$ .

**Définition A.1.6.** Soit  $(\Lambda, (\Lambda_i)_{i \in \mathbb{R}})$  un anneau filtré continûment. On définit sa valuation  $\nu : \Lambda \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  par

$$\nu(x) := \begin{cases} -\infty & \text{si } x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{R}} \Lambda_i \\ \sup\{i \in \mathbb{R} \mid x \in \Lambda_i\} & \\ +\infty & \text{si } x \in \bigcap_{i \in \mathbb{R}} \Lambda_i \end{cases}$$

**Lemme A.1.7.** La fonction  $\nu : \mathbb{Z}[G] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  définie comme la restriction de celle de la définition 1.1.9 est la valuation induite par la  $u$ -filtration de  $\mathbb{Z}[G]$ .

*Démonstration.* Aucun élément ne prend la valeur  $-\infty$  vu que la  $u$ -filtration est exhaustive d'après le lemme A.1.2. Le seul élément prenant la valeur  $+\infty$  est 0 grâce à la séparabilité.

Prenons  $0 \neq \lambda \in \Lambda$ . On a clairement que  $\lambda \in \mathbb{Z}[G]_{\nu(\lambda)}$  du fait que  $\text{supp}(\lambda) \subseteq G^{\geq \nu(\lambda)}$  par définition de  $\nu$ . De même, si  $k > \nu(\lambda)$ , on a  $\lambda \notin \mathbb{Z}[G]_k$  puisqu'aucun terme de la racine de  $\lambda$  n'est dans  $G^{\geq k}$ . Ainsi  $\nu(\lambda) = \sup\{i \in \mathbb{R} \mid \lambda \in \mathbb{Z}[G]_i\}$ .  $\square$

**Remarque A.1.8.** On signale que les propriétés sur la valuation que nous avons prouvées dans 1.1.10 sont un fait général des valuations induites par des filtrations comme on peut voir dans [BoAC, Ch.III, §2,2].

Il y a une seule topologie sur un groupe  $G$  pour laquelle les opérations de produit et d'inversion sont continues une fois que l'on s'est fixé une base de voisinages  $\mathfrak{B}^e \subseteq G$  de l'élément neutre  $e \in G$ . Naturellement, on doit demander une certaine régularité à la collection  $\mathfrak{B}^e$  pour pouvoir obtenir la topologie mentionnée : il suffit que  $\mathfrak{B}^e$  soit une *base d'un filtre* (consulter [BoTG, Ch.I, §6, n°3]) notamment qu'elle soit non-vide, fermée pour les intersections finies, telle que  $\emptyset \notin \mathfrak{B}^e$ , et vérifie trois conditions relatives au produit et à l'inversion. Si la collection  $\mathfrak{B}^e$  est prise parmi les sous-groupes de  $G$ , deux de ces trois dernières conditions sont satisfaites, et si  $G$  est abélien, la troisième est aussi vérifiée.

Comme la filtration d'un groupe (continue ou classique) est fermée pour les intersections finies – vu que  $\Lambda_{i_1} \cap \dots \cap \Lambda_{i_n} = \Lambda_{\{\max i_j\}}$  –, on obtient la proposition suivante.

**Proposition A.1.9.** *Soit  $(\Lambda, \mathfrak{F} = (\Lambda_i)_{i \in \mathbb{R}})$  un anneau filtré continûment ; il existe une unique topologie  $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$  sur  $\Lambda$  pour laquelle le sous-groupe additif sous-jacent  $(\Lambda, +)$  ayant  $(\Lambda_i)_{i \in \mathbb{R}}$  comme une base de voisinages de  $0 \in \Lambda$ .*

*Démonstration.* Prendre  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}^0 = \{\Lambda_i \mid i \in \mathbb{R}\}$  dans [BoTG, Ch. III, §1, n°2, Pr.1].  $\square$

**Définition A.1.10.** *La topologie  $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$  définie sur un anneau filtré (classique ou continûment) par la proposition A.1.9 est appelée topologie induite par la filtration  $\mathfrak{F}$ .*

**Lemme A.1.11.** *Soit  $\varepsilon > 0$  et considérons  $\mathfrak{F}_{\varepsilon}$  la filtration classique induite par la filtration continue  $\mathfrak{F}$  de  $\Lambda$ . Les topologies  $\mathcal{T}_{\varepsilon}$  et  $\mathcal{T}$  sur  $\Lambda$  induites respectivement par  $\mathfrak{F}_{\varepsilon}$  et  $\mathfrak{F}$  sont équivalentes.*

*Démonstration.* Il est suffisant de vérifier que les bases des filtres associées sont équivalentes. Ceci signifie que chaque élément de chaque base contient un élément de l'autre. Les bases sont  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}^0 = \{\Lambda_i \mid i \in \mathbb{R}\}$  et  $\mathfrak{B}_{\varepsilon\mathbb{Z}}^0 = \{\Lambda_n \mid n \in \varepsilon\mathbb{Z}\}$ . La propriété archimédienne de  $\mathbb{R}$  démontre le lemme.  $\square$

On désigne cette topologie par  $\mathcal{T}$  quand il n'y a pas de confusion possible.

Le groupe topologique  $(\Lambda, \mathcal{T}_{\mathfrak{F}})$  est Hausdorff si et seulement si le singleton  $e$  est fermé, ce qui est le cas quand la filtration est séparable. On obtient une base de voisinages  $\mathfrak{B}^{\lambda}$  de n'importe quel  $\lambda \in \Lambda$  en translatant la base en l'élément neutre ( $\mathfrak{B}^{\lambda} = \lambda + \mathfrak{B}^e$ ) ; on déduit ainsi que la topologie de  $\Lambda$  est discrète si et seulement si  $\{e\} \in \mathfrak{B}^e$ . Nous avons ainsi :

**Lemme A.1.12.** *La topologie  $\mathcal{T}$  sur l'anneau filtré  $\mathbb{Z}[G]$  est Hausdorff et n'est pas discrète.*

Remarquons que pour le moment, nous n'avons pas parlé d'*anneaux topologiques*, dont l'opération produit doit aussi être continue. La topologie induite par la filtration d'un anneau filtré peut ne pas être compatible avec le produit. On ne peut pas parler en général de *l'anneau topologique induit par une filtration*.

**Lemme A.1.13.** *L'anneau  $(\mathbb{Z}[G], \mathcal{T}_{\mathfrak{F}})$  est un anneau topologique.*

*Démonstration.* La topologie induite par une filtration est compatible avec le produit de l'anneau quand la filtration est exhaustive (consulter [BoAC, Ch.III, §2, n°5, Pr.3]), ce qui est le cas de  $\mathfrak{F}$ .  $\square$

Les groupes topologiques Hausdorff ne se plongent pas de façon générale comme un sous-groupe partout dense d'un groupe topologique complet (voir [BoTG, Ch.III, §3, num.4, Th.1]) ; ceci peut-être fait si le groupe est en plus abélien. Ainsi, un anneau topologique Hausdorff  $\Lambda$  peut toujours être plongé dans un groupe topologique Hausdorff que nous notons  $\hat{\Lambda}$ , de sorte que l'opération produit de  $\Lambda$  s'étend continûment sur  $\hat{\Lambda}$ . De plus,  $\hat{\Lambda}$  est déterminé uniquement à isomorphisme de groupes près et le sous-anneau  $\Lambda$  – vu comme un sous-espace de  $\hat{\Lambda}$  – est partout dense (consulter [BoTG, Ch.III, §6, n°5, Pr.6]).

Voyons maintenant que l'anneau  $\mathbb{Z}[G]$  est métrisable : il s'agit d'un fait général pour les anneaux filtrés avec filtration exhaustive. On donne une métrique dont la topologie induite est équivalente à la topologie induite par la filtration.

**Lemme A.1.14.** *Soit  $0 < \rho < 1$ . L'application*

$$\begin{aligned} d : \mathbb{Z}[G] \times \mathbb{Z}[G] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (\lambda, \mu) &\longmapsto \rho^{\nu(x-y)} \end{aligned}$$

*définit une métrique<sup>1</sup> sur  $\mathbb{Z}[G]$ .*

*Démonstration.* Prenons  $\rho := e^{-1}$  pour simplifier. Clairement  $d(\lambda, \mu) = 0$  si et seulement si  $\nu(\lambda - \mu) = \infty$  ce qui n'est le cas que quand  $\lambda = \mu$ . La condition de symétrie pour  $d$  est vérifiée du fait que la valuation ne tient pas compte des coefficients entier des élément dans le support de  $\lambda$ , mais seulement le support et  $\text{supp}(\lambda) = \text{supp}(-\lambda)$ . Pour prouver l'inégalité triangulaire, démontrons une condition plus forte, qui est celle des ultramétriques :

$$d(\lambda, \mu) \leq \max\{d(\lambda, \tau), d(\tau, \mu)\}, \text{ pour tous } \lambda, \mu, \tau \in \mathbb{Z}[G].$$

En utilisant la propriété 1 de 1.1.10 on voit que

$$\begin{aligned} \nu(\lambda - \mu) &= \nu((\lambda - \tau) + (\tau - \mu)) \geq \min\{\nu(\lambda - \tau), \nu(\tau - \mu)\} \implies \\ d(\lambda, \mu) &= e^{-\nu(\lambda - \mu)} \leq e^{-\min\{\nu(\lambda - \tau), \nu(\tau - \mu)\}} = e^{\max\{-\nu(\lambda - \tau), -\nu(\tau - \mu)\}} = \\ &= \max\{e^{-\nu(\lambda - \tau)}, e^{-\nu(\tau - \mu)}\} = \max\{d(\lambda, \tau), d(\tau, \mu)\} \end{aligned}$$

□

Nous avons le lemme suivant qui aidera à étudier les voisinages de 0 pour la topologie induite par la métrique.

**Lemme A.1.15.** *L'application*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{Z}[G] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \lambda &\longmapsto d(\lambda, 0) \end{aligned}$$

*vérifie*

1.  $\|\lambda\| = 0$  si et seulement si  $\lambda = 0$ ,
2.  $\|\lambda + \mu\| \leq \max\{\|\lambda\|, \|\mu\|\}$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}[G]$ ,
3.  $\|\lambda \cdot \mu\| \leq \|\lambda\| \|\mu\|$  pour tous  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}[G]$ ,
4.  $\|1_{\mathbb{Z}[G]}\| = 1$ .

*Démonstration.* Les deux premières affirmations sont une conséquence directe du fait que  $d$  est une ultramétrique. Le dernier est un simple calcul, et le troisième se déduit de la propriété 2 citée dans 1.1.10. □

Pour un anneau  $\Lambda$ , une application  $\|\cdot\| : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui satisfait les conditions du lemme A.1.15 est appelée *ultramétrique* pour l'anneau. Si on remplace la condition 2 par la condition plus faible de l'inégalité triangulaire classique, la paire  $(\Lambda, \|\cdot\|)$  est appelée *anneau métrique*.

Si  $\Lambda$  est un anneau topologique, on peut se demander quelle est la relation entre la topologie de  $\Lambda$  et celle qui est induite par la métrique. Pour l'anneau de groupe, nous avons le résultat suivant.

---

1. On verra que  $d$  est une *ultramétrique*.

**Lemme A.1.16.** *Les topologies  $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$  et  $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$  de  $\mathbb{Z}[G]$  coïncident.*

*Démonstration.* Il suffit de voir que pour tout ensemble  $O_1$  de l'une des bases de voisinages de 0 on peut trouver un ensemble  $O_2$  de l'autre base de voisinages de 0 tel que  $O_2 \subseteq O_1$ . Pour n'importe quel autre point  $\lambda \neq 0$ , il suffit de faire une translation par  $\lambda$ .

D'une part, rappelons que  $\mathfrak{B}_{\mathfrak{F}}^0 = \{\mathbb{Z}[G]_i \mid i \in \mathbb{R}\}$  où  $\mathbb{Z}[G]_i = \{\lambda \in \mathbb{Z}[G] \mid \text{supp}(\lambda) \subseteq G^{\geq i}\}$ . D'autre part  $\mathfrak{B}_{\|\cdot\|}^0 = \{B^{\|\cdot\|}(0, \varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathbb{R}^+\}$ ; regardons une boule de rayon  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} B^{\|\cdot\|}(0, \varepsilon) &= \{\lambda \in \mathbb{Z}[G] \mid \|\lambda\| < \varepsilon\} = \{\lambda \in \mathbb{Z}[G] \mid e^{-\nu(\lambda)} < \varepsilon\} = \\ &= \{\lambda \in \mathbb{Z}[G] \mid \nu(\lambda) > -\ln(\varepsilon)\} \end{aligned}$$

Nous avons ainsi les inclusions demandées  $\mathbb{Z}[G]_i \subseteq B(0, \varepsilon) \subseteq \mathbb{Z}[G]_j, \forall i > -\ln(\varepsilon), \forall j \leq -\ln(\varepsilon)$   $\square$

On peut conclure que

**Proposition A.1.17.** *La complétion  $\widehat{\mathbb{Z}[G]_{\mathfrak{F}}}$  de l'anneau filtré  $(\mathbb{Z}[G], \mathfrak{F})$  de A.1.2 est isomorphe comme anneau topologique à la complétion  $\widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}$  de l'anneau métrique  $(\mathbb{Z}[G], \|\cdot\|)$ .*

*Démonstration.* Ceci est conséquence de deux faits. Le premier est que les topologies sous-jacentes sont la même grâce au lemme A.1.16; ainsi, si  $\widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}$  est un anneau topologique, grâce à [BoTG, Ch.III, §6, n°5, Pr.6] on sait que les deux anneaux topologiques sont isomorphes, comme on avait déjà remarqué juste après le lemme A.1.13. Comme l'opération d'addition s'étend toujours continûment, la seule question que nous devons nous poser est si l'opération du produit étendu  $\widehat{\cdot} : \widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}} \times \widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}} \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}$  est continue, puisque pour l'instant  $\widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}$  n'est qu'un *espace métrique* complet.

Mais  $\mathbb{Z}[G]$  est partout dense dans  $\widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}$  et l'application  $\mathbb{Z}[G] \times \mathbb{Z}[G] \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}$  donnée par la composition  $i_{\|\cdot\|} \circ (\cdot)$  où  $i_{\|\cdot\|} : \mathbb{Z}[G] \hookrightarrow \widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}$  désigne l'inclusion, est continue et  $\mathbb{Z}$ -bilinéaire. On peut déduire la continuité du produit étendu en utilisant [BoTG, Ch.III, §6, n°5, Th.1]. L'anneau métrique complet  $\widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}$  est ainsi un anneau topologique et la proposition est démontrée.  $\square$

**Remarque A.1.18.** On peut voir la complétion  $\widehat{\Lambda}$  d'un anneau muni d'une filtration exhaustive est comme la limite projective  $\varprojlim_{i \in \mathbb{R}} \Lambda/\Lambda_i$ , qui vient équipée d'un morphisme canonique d'anneaux  $i : \Lambda \rightarrow \widehat{\Lambda}$  grâce à la propriété universelle de la limite projective et dont l'image  $i(\Lambda)$  s'identifie avec l'anneau Hausdorff partout dense  $\Lambda/\bigcap_{i \in \mathbb{R}} \Lambda_i$  (l'intersection est toujours un idéal bilatéral). Comme la filtration est séparable on a  $i(\Lambda) \simeq \Lambda$ . On a aussi la relation  $\overline{i(\Lambda_i)} \simeq \widehat{\Lambda}_i$ , et il n'est pas difficile de voir que  $\widehat{\mathfrak{F}} := \{\widehat{\Lambda}_i \mid i \in \mathbb{R}\}$  est une filtration pour  $\widehat{\Lambda}$  qui est compatible avec la structure d'anneau.

On a déjà introduit et utilisé un anneau qui contient l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}[G]$  dans la définition 1.1.5 que l'on appelle *anneau de Novikov* :

$$\mathbb{Z}[G]_u := \{\lambda \in \mathbb{Z}[[G]] \mid \forall C \in \mathbb{R}, \text{supp}(\lambda) \cap G^{<C} \text{ est fini}\}.$$

Voyons que l'anneau de Novikov n'est autre que la complétion que l'on vient d'étudier.

**Lemme A.1.19.**

$$\mathbb{Z}[G]_u = \widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}$$

*Démonstration.* Prenons d'abord un  $\lambda \in \mathbb{Z}[[G]]$  tel que pour tout  $C \in \mathbb{R}$  l'ensemble  $\text{supp}(\lambda) \cap G^{<C}$  soit fini. Cette condition dit que pour tout  $i \in \mathbb{R}$ , les éléments

$$\lambda_i := \sum_{g \in \text{supp}(\lambda) \cap G^{<i}} n_g(\lambda)g$$

sont dans  $\mathbb{Z}[G]$ . Considérons  $\bar{\lambda}_i$  la projection de  $\lambda_i$  dans  $\mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}[G]_i$ .

Par définition des  $\lambda_i$ , l'élément déterminé par  $\varprojlim \bar{\lambda}_i$  dans la limite projective  $\varprojlim_{i \in \mathbb{R}} \mathbb{Z}[G]/\mathbb{Z}[G]_i = \widehat{\mathbb{Z}[G]_{\mathfrak{F}}}$  (voir la remarque A.1.18) coïncide avec  $\lambda$ . On peut ainsi voir  $\lambda$  comme un élément de  $\widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}$  grâce à la proposition A.1.17.

Prenons maintenant une suite de Cauchy  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $(\mathbb{Z}[G], \|\cdot\|)$  et considérons sa limite  $\lambda$  dans la complétion  $\widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}$ . Supposons par l'absurde qu'il existe un  $C \in \mathbb{R}$  tel que  $\text{supp}(\lambda) \cap G^{<C}$  est infini. On peut trouver une suite  $(g_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset G^{<C}$  telle que  $g_{n_m} \in \text{supp}(\lambda_{n_m}) \setminus \text{supp}(\lambda_{n_p})$  si  $m < p$ . Alors  $\{g_{n_m}, g_{n_p}\} \subset \text{supp}(\lambda_{n_m} - \lambda_{n_p})$  pour tous  $m < p$ . Comme  $(g_{n_m})_{m \in \mathbb{N}} \subset G^{<C}$ , nous avons que  $\nu(\lambda_{n_m} - \lambda_{n_p}) < C$  et ce pour tout  $m \neq p$ . Prenons  $0 < \varepsilon < e^{-C}$ . Comme la suite est de Cauchy, il existe un  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $p, m \geq N$ ,  $\|\lambda_{n_m} - \lambda_{n_p}\| < \varepsilon$ ; mais ceci est équivalent à  $\nu(\lambda_{n_m} - \lambda_{n_p}) > -\ln(\varepsilon) > C$  par le choix de  $\varepsilon$  et nous sommes arrivés à une contradiction.  $\square$

## A.2 Quelques propriétés de l'anneau de Novikov

On note  $\Lambda := \mathbb{Z}[G]$  dorénavant. Les extensions des applications de  $\Lambda$  vers  $\Lambda_u$  sont notées de la même façon, par exemple, on note  $\|\cdot\|$  l'extension de la norme de A.1.15 à  $\Lambda_u$  est toujours notée  $\|\cdot\|$ ; elle provient toujours d'une ultramétrie, vu que l'extension de la valuation  $\nu : \Lambda_u \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est donnée par celle de la définition 1.1.9 :

$$\nu(\lambda) := \begin{cases} \min \{u(g) \mid g \in \text{supp}(\lambda)\} \\ +\infty \text{ if } \lambda = 0 \end{cases}$$

comme on déduit du lemme A.1.7.

**Lemme A.2.1.** *Soit  $B(\lambda, r)$  la boule de centre  $\lambda$  et de rayon  $r > 0$  dans  $(\Lambda_u, \|\cdot\|)$ . On a les faits suivants :*

1. l'égalité  $B(0, 1) = \{\lambda \in \Lambda_u \mid \nu(\lambda) > 0\}$ ,
2. si  $\|\lambda\| = r$  alors  $B(\lambda, s) = B(0, s)$  pour tout  $s \geq r$ ,
3. toute boule ouverte est fermée et toute boule fermée est ouverte,
4. pour tous  $\lambda, \mu, \tau \in \Lambda_u$ , deux parmi les trois sont à la même distance du troisième.

*Démonstration.* Le premier est un calcul trivial. Les autres sont des faits généraux des espaces ultramétriques. Le deuxième se reformule en disant que « tout élément d'une boule est un centre », le quatrième équivaut à l'énoncé « tout triangle est isocèle ».  $\square$

**Remarque A.2.2.** L'affirmation 4 de A.2.1 s'exprime aussi comme

$$\|\lambda\| < \|\mu\| \implies \|\lambda + \mu\| = \|\mu\|$$

Si on prend  $\lambda \neq -\mu$  et on compare les distances entre les trois points différents  $0, \lambda, \lambda + \mu$ , on obtient  $\|\lambda\|, \|\mu\|, \|\lambda + \mu\|$ . Au moins deux des trois doivent être égales. Si  $\|\lambda\| < \|\mu\|$  on a  $\|\lambda + \mu\| \leq \max\{\|\lambda\|, \|\mu\|\} = \|\mu\|$  et aussi  $\|\mu\| \leq \|\lambda + \mu\|$  car  $\|\mu\| = \|\mu + \lambda - \lambda\| \leq \max\{\|\mu + \lambda\|, \|\lambda\|\} = \|\mu + \lambda\|$ , où la dernière égalité est nécessaire pour éviter une contradiction avec  $\|\lambda\| < \|\mu\|$ .

Les éléments de  $\Lambda_u$  que l'on donne dans la définition suivante jouent un rôle important : les matrices auto-élémentaires de type 2 ( $i = j$ ) comme dans 1.2.1 sont inversibles du fait que le terme non-trivial sur la diagonale est une *unité triviale*.

**Définition A.2.3.** On rappelle que tout  $\lambda \in \Lambda_u$  non-nul admet une décomposition racine/tronc (1.1.19). On dit que  $\lambda$  est simple quand  $m(\lambda) = n_g(\lambda)g$ . Autrement dit,  $\lambda$  est simple si  $\text{supp}(\lambda) \cap G^{\leq \nu(\lambda)} = \{g\}$ . Si  $\lambda$  est simple on pose  $n(\lambda) := n_g(\lambda) \in \mathbb{Z}$  et  $\gamma(\lambda) := g \in G$  les seuls tels que  $m(\lambda) = n(\lambda)\gamma(\lambda)$ . Les applications  $n, \gamma$  sont multiplicatives et  $\|\lambda\| = \|\gamma(\lambda)\| = e^{-u(g)}$  quand  $\lambda$  est simple.

Un élément simple  $\lambda \in \Lambda_u$  tel que  $n(\lambda) = \pm 1$  est appelé *unité triviale*. On note l'ensemble des unités triviales de  $\Lambda_u$  par  $\mathfrak{U}_u$ .

On sait que  $\mathfrak{U}_u \subseteq \Lambda_u^\times$  grâce au lemme 1.1.35. On redémontre ceci en utilisant le fait que  $\Lambda_u$  est un anneau ultramétrique complet.

**Lemme A.2.4.** L'ensemble des unités triviales  $\mathfrak{U}_u$  est un sous-groupe des unités  $\Lambda_u^\times$  de l'anneau de Novikov.

*Démonstration.* Une unité triviale s'écrit comme suit

$$\lambda = \pm g_0 + \sum_{u(g_i) > u(g_0)} n_i g_i$$

Supposons que  $n(\lambda) = +1$ ; on définit  $h_i := g_i g_0^{-1}$ . Ainsi,  $\lambda$  est inversible si et seulement si l'élément

$$1 + \sum_{u(g_i) > u(g_0)} n_i g_i g_0^{-1} = 1 + \sum_{u(h_i) > 0} n_i h_i = 1 + \mu$$

est inversible. On remarque que  $\nu(-\mu) > 0$  car  $u(h_i) > 0$  pour tout  $i$ . Un inverse formel pour  $1 + \mu$  est  $\sum_{n=0}^{\infty} (-\mu)^n$ . Mais la dernière série est absolument convergente car  $\sum_{n=0}^{\infty} \|(-\mu)^n\|$  est majorée par la série géométrique de rapport  $\|-\mu\|$ , qui est convergente puisque  $\|-\mu\| < 1$  est équivalent à  $\nu(-\mu) > 0$ .

Mais une série qui converge absolument dans un espace complet converge aussi, et on sait que l'anneau métrique  $\Lambda_u$  est complet. L'élément  $1 + \mu$  est donc inversible.  $\square$





# Bibliographie

- [AR] R. ABRAHAM, J. ROBBIN, *Transversal mappings and flows*, Benjamin Inc. New York, 1967.
- [BoAC] N. BOURBAKI, *Algèbre Commutative - Chapitres 1 à 4*, Masson, Paris, 1985.
- [BoTG] N. BOURBAKI, *Topologie Générale - Chapitres 1 à 4*, Hermann, Paris, 1971.
- [Ce] J. CERF, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Publication mathématique de l'IHES, n° 39, 1970.
- [Ch] A. CHENCINER, *Sur la géométrie des strates de petites codimensions de l'espace des fonctions différentiables réelles sur une variété*, Thèse à Orsay, 1970.
- [CL] A. CHENCINER ET F. LAUDENBACH, *Contribution à une théorie de Smale à un paramètre dans le cas non simplement connexe*, Annales Scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série, Tome 3, num. 4, 1970, p. 409 - 478.
- [Cohe] M. M. COHEN, *A Course in Simple-Homotopy Theory*, Springer-Verlag [GTM-10], 1973.
- [GG] M. GOLUBITSKY & V. GUILLEMIN, *Stable Mappings and their Singularities*, Springer-Verlag [GTM-14], 1980.
- [HW] A. HATCHER & J. WAGONER, *Pseudo-Isotopies of Compact Manifolds*, Astérisque 6, 1973.
- [Ig1] K. IGUSA, *The stability theorem for smooth pseudo-isotopies*, K-Theory 2, num.1-2, pgs. 1-355, 1988.
- [Ig2] K. IGUSA, *What happens to Hatcher and Wagoner's formula for  $\pi_0(C(M))$  when the first Postnikov invariant of  $M$  is nontrivial ?*, LNM vol. 1046, Springer-Verlag, pgs. 104-172, 1984.

- [Ki] L.C. KINSEY, *Pseudoisotopies and submersions of a compact manifold to the circle*, Topology, Vol. 26, pgs. 67-78, 1987,
- [Lan] S. LANG, *Algebra*, Springer-Verlag [GTM-211], Revised 3rd Edition, 2002
- [Lat] F. LATOUR, *Existence de 1-formes fermées non singulières dans une classe de cohomologie de De Rham*, Publications Mathématiques IHÉS, 1994
- [Lau1] F. LAUDENBACH, *A proof of Reidemeister-Singer's Theorem by Cerf's methods*, référence <http://arxiv.org/abs/1202.1130>, 2012.
- [Lau2] F. LAUDENBACH, *Submersions sur le cercle*, Bull. de la SMF, Tome 104 pgs. 417 - 431, 1976.
- [LB] F. LAUDENBACH ET S. BLANK, *Isotopie de formes fermées en dimension trois*, Inventiones Mathematicae Vol. 54, n2, p. 103-177, 1979.
- [Mar] J. MARTINET, *Singularities of Smooth Functions and Maps*, LMS - Lecture Note Series 58, 1982.
- [Mi1] J.W. MILNOR, *Introduction to Algebraic K-Theory*, Princeton University Press, 1971
- [Mi2] J.W. MILNOR, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton University Press, 1965
- [No1] S.P. NOVIKOV, *Multivalued functions and functionals. An analogue of the Morse theory*, Soviet Math. Dokl. 24, pgs. 222 - 225, 1981
- [No2] S.P. NOVIKOV, *The Hamiltonian formalism and a multi-valued analogue of Morse theory*, Russian Math. Surveys 37, pgs. 1 - 56, 1982
- [Pa1] A.V. PAJITNOV, *Circle-valued Morse Theory*, de Gruyter Studies in Mathematics n° 32, 2006
- [Pa2] A.V. PAJITNOV, *On the sharpness of Novikov type inequalities for manifolds with free abelian fundamental group*, Math. USSR Sbornik, Vol.68,pgs. 351-389, 1991
- [Si1] J.-C. SIKORAV, *Formes différentielles fermées non-singulières sur le n-tore*, Comment. Math. Helvetici 57, pgs. 79-106, 1982

- [Si2] J.-C. SIKORAV, Communication personnelle, 2011
- [Tho] R. THOM, *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 6 (1956). 43-87
- [Ti] D. TISCHLER, *On fibering certain foliated manifolds over  $\mathbb{S}^1$* , Topology Vol. 9, pp. 153-154 (1970)



# Index

- $-\gamma^{\boxtimes}-$ , 97
- $-(\delta_{\bullet})^{\#}-$ , 51
- $d(-, -)$ , 110
- $\|\cdot\|$ , 110
- $\partial_{\text{lat}}C$ , 34
- $\partial_{*}^{\xi}$ , 27
- $P^l \Big/ \epsilon g P^k, P^k \Big/ \lambda_{\epsilon g} P^k$ , 56
- $\langle P, Q \rangle^{\xi}$ , 26
- $\langle P, Q \rangle_L^{\xi}$ , 30
- $\mathfrak{B}^e, \mathfrak{B}^{\lambda}$ , 108
- $\mathcal{B}, \mathcal{S}, \mathcal{P}$ , 94
- $\mathcal{E}_{i+1}$ , 95
- $\mathfrak{F}$ , 107
- $\mathfrak{F}_{\varepsilon}$ , 108
- $\mathcal{G}, \mathcal{G}(\alpha)$ , 17
- $\mathcal{G}^0$ , 23
- $\mathcal{G}_{i+1}^{\beta}, \mathcal{E}_{i+1}^{\alpha}$ , 96
- $\mathcal{L}(p, q)$ , 23
- $\mathcal{M}, \mathcal{M}^{\pm}, \partial_{\text{lat}}\mathcal{M}$ , 45
- $\mathcal{T}_{\mathfrak{F}}$ , 109
- $\mathfrak{U}_u$ , 113
- $\mathcal{Z}$ , 15
- $\mathcal{Z}_0, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_R$ , 16, 32
- $\mathbb{Z}[G]_i$ , 107
- $\widehat{\mathbb{Z}[G]_{\|\cdot\|}}, \widehat{\mathbb{Z}[G]_{\mathfrak{F}}}$ , 111
- $\ell$ , 23
- $\ell$ , 40
- $\Gamma(-)$ , 15
- $\Lambda$ , 1
- $\Lambda_u$ , 2
- $\Lambda_{u_{\text{ab}}}$ , 8
- $(\Lambda_i)_{i \in \mathbb{R}}$ , 107
- $\Omega^u$ , ix, 15
- $\Omega_{NS}^u$ , ix
- $\widehat{\Omega^u}, \widehat{\Omega_{NS}^u}$ , 32
- $\Omega_0^u, \Omega_1^u, \Omega_2^u, \Omega_R^u$ , 32
- $\left(\widehat{\Omega_L^u}\right)_0, \left(\widehat{\Omega_L^u}\right)_1$ , 43
- $\chi_i, \lambda_i$ , 96
- $\gamma, \gamma_i$ , 96
- $\lambda'$ , 8
- $\nu$ , 3, 16, 108, 112
- $\nu_u$ , 3
- $\nu_{u_{\text{ab}}}, \nu_{\text{ab}}$ , 8
- $\rho_i, \delta_i$ , 95
- $(\xi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ , 20
- $\xi_{N_2}^{N_1}(t)$ , 51
- $B(\alpha)$ , 24
- $B^{\alpha}$ , 37
- $B^{\alpha}, B_{\bullet}$ , 38
- $C^{\pm}$ , 34
- $C_*(\alpha)$ , 25
- $E_{ij}^{\lambda}, E_{ii}^{\lambda}$ , 13
- $\text{EA}(r, \Lambda_{-u})$ , 13
- $G^{<C}, G^{=C}, G^{>C}$ , 1
- $G_{\text{ab}}$ , 7
- $G, G(\alpha)$ , 28
- $G_L^0$ , 28
- $G_L^1$ , 40
- $G_L^0, G_L^1, G_L^R$ , 41
- $\text{GL}(r, \Lambda_{-u})$ , 13
- $H^{\pm}$ , 51
- $I_L^{\pm}(P)$ , 71
- $L(\ell)$ , 23
- $L(\gamma)$ , 22
- $L_{\lambda}$ , 3
- $\widetilde{M}$ , 15
- $\widetilde{M}$ , 24
- $\text{Mat}_s(-)$ , 9
- $\text{Or}$ , 24

- $T_{B\bullet}$ , 39
- $T_{B(\alpha)}$ , 26
- $W^s(P), W^u(P)$ , 24
- $W^s(p), W^u(p)$ , 22
- $W^s(p; \xi), W^u(p; \xi)$ , 20
- $W_L^s(p), W_L^u(p)$ , 22
- $W_{\text{loc}}^s(p), W_{\text{loc}}^u(p)$ , 20
- $Z(\alpha)$ , 15
- $Z(\alpha), Z(\xi)$ , 15
- ab, 8
- $\det_{\text{ab}}$ , 10
- $(h_t)_{t \in [0,1]}$ , 33
- pos, 10
- supp, 1
- $t_N, t_E$ , 61
- $\text{tr}_H, \text{tr}_L$ , 5, 30
- $u$ , ix, 1
- 1-forme
  - centre d'une, 64
  - codimension d'une, 16
  - de Morse, 16
  - de naissance/élimination, 16
  - de petite/grande codimension, 16
  - de queue d'aronde, 16
  - fermée dans la classe  $u$ , 15
  - non-singulière, ix
  - sans centre, 67
  - zéros d'une, 15
- $\alpha$ -longueur, 22
- $\nu$ -positif/négatif, 4
- abélianisé
  - d'un groupe, 7
  - déterminant, 10
  - morphisme d'abélianisation, 8
- anneau
  - de groupe, 1
  - de Novikov, 2
  - de Novikov abélianisé, 8
  - filtré continûment, 107
  - topologique, 109
- application
  - de choix, 96
  - de localisation, 96
  - de rencontre, 95
  - des coefficients directeurs, 95
- auto-glissement, 51
- basé
  - chemin de 1-formes, 38
  - pseudo-gradient, 28
- base de voisinages, 108
- brin, 37, 94
  - début et fin d'un, 37
  - distingué, 94
  - indice d'un, 37
  - rencontre de deux, 95
  - source/puits, 94
- centre, 64
- centre d'une 1-forme, 64
- champ de vecteurs
  - hyperbolique, 20
  - Morse-Smale, 23
  - presque-hyperbolique, 20
- chemin
  - d'élimination, 35
  - d'évolution  $L$ -normale, 77
  - d'évolution normale, 61
  - de 1-formes basé sous forme normale, 96
  - de 1-formes basé/muni de relevés, 38
  - de 1-formes générique, 33
  - de naissance, 34
  - de naissance issu de, 34, 35
  - de primitives, 33
- choix
  - application de, 96
  - continu de relevés, 38
  - de relevés, 37
  - de relevés des éliminations, 38
- co-orientation d'une variété stable, 24
- codimension
  - d'un zéro, 16
  - d'une 1-forme, 16
  - petite/grande, 16
- coefficients directeurs, 95
  - effet de la greffe sur les, 99

- complexe de Morse-Novikov, 24
- cylindre, 34
  - adapté à  $\alpha$ , 34
  - bord supérieur/inférieur/lateral, 34
- début d'un brin, 37
- descente
  - lemme de, 44, 46
- différentielle de Morse-Novikov, 27
- disque de balayage, 49
- élémentaire
  - endomorphisme, 20
  - lèvre, 93
  - matrice, 12
  - queue d'aronde, 91
- élimination
  - 1-forme de, 16
  - $L$ -indépendante, 76
  - zéro de type, 15
- enroulement, 25
- ensemble de  $L$ -dépendance, 71
- équipement
  - d'un chemin générique de 1-formes, 42
  - d'une 1-forme, 32
  - $L$ -transverse, 42
- évolution  $L$ -normale, 77
- évolution normale, 61
- famille
  - de 1-formes générique, 33
  - de primitives, 33
  - en queue d'aronde, 36
- filtration
  - compatible avec la structure d'anneau, 107
  - d'un groupe, 107
  - exhaustive/séparable, 107
  - topologie induite par une, 109
  - $u$ -filtration de  $\mathbb{Z}[G]$ , 107
- fin d'un brin, 37
- flot d'un champ de vecteurs, 20
- flux, 51
- forme normale, 96
  - théorème de, 100
- générique
  - famille de 1-formes, 33
- glissement
  - effet algébrique, 46
  - $L$ -élémentaire, 42
  - réalisation d'un, 56
  - temps de, 42
- graphique de Cerf-Novikov, 38
  - qui se ferme, 95
- greffe, 97
  - effet d'une, 99
  - itérée, 101
- hemisphère d'entrée/de sortie, 51
- incidence, 26
  - matrice de, 27
- indice
  - d'un brin, 37
  - d'un zéro d'un champ de vecteurs hyperbolique, 21
  - d'un zéro de Morse, naissance, élimination ou queue d'aronde, 15
- intervalle
  - des naissances, des éliminations, de Morse, 61
  - des pré-éliminations, 77
- $L$ -élémentaire
  - glissement, 42
  - liaison, 40
  - pseudo-gradient avec une liaison, 40
  - signe d'une liaison, 42
  - stratification, 41
- $L$ -incidence, 30
  - matrice de, 30
- $L$ -indépendance, 71
- $L$ -transverse
  - équipement, 42
  - ouverture, 31
  - pseudo-gradient, 28
- $L^\pm$ -indépendance, 71
- lèvre, 93
  - élémentaire, 93



- lacet en queue d'aronde, 83
- lemme
  - de descente, 44, 46
  - des longueurs, 10
  - du déterminant abélianisé, 80
- liaison, 23
  - concernée avec un zéro, 23
  - enroulement d'une, 25
  - $L$ -élémentaire, 40
  - relevée, 25
  - signe d'une, 25, 42
  - $u$ -enroulement d'une, 25
- localisation
  - application de, 96
- longueur
  - d'une liaison, 23, 26
  - d'une trajectoire, 22
  - ensemble des, 3
  - lemme des, 10, 11
- métrique
  - sur l'anneau de groupe, 110
- matrice
  - auto-élémentaire, 12, 46
  - d'incidence, 27
  - de  $L$ -incidence, 30
  - de pré-élimination, 77
  - élémentaire, 12, 46
  - invertible, 13
  - monômiale, 81
  - par lignes, 55
- modèle
  - de Morse adapté à  $\xi$ , 44
  - de naissance d'indice  $i$ , 34
  - de queue d'aronde descendante, 36
- module de Morse-Novikov, 25
- Morse-Novikov
  - complexe de, 24
  - différentielle de, 27
  - module de, 25
- Morse-Smale
  - procédé d'élimination, 87, 88
  - pseudo-gradient, 23
- naissance
  - 1-forme de, 16
  - $L$ -indépendante, 72
  - unicité des, 36
  - zéro de type, 15
- orbite, 22
- orientation d'une variété instable, 24
- point de dichotomie, 53
- positivité, 10
  - et taille, 30
- prescription, 96
  - d'indice  $i$ , 96
- primitive
  - chemin de, 33
  - d'une 1-forme  $\alpha$ , 24
- pseudo-gradient, 17
  - avec une liaison  $L$ -élémentaire, 40
  - basé, 28
  - $L$ -transverse, 28
  - Morse-Smale, 23
  - pour une 1-forme  $\alpha$ , 17
- puits, 94
  - distingué, 94
- queue d'aronde
  - 1-forme de, 16
  - élémentaire, 91
  - famille en, 36
  - zéro de type, 15
- racine/tronc, 7
- relevés, 24
  - choix continu des, 38
  - choix de, 37
  - $L$ -indépendant, 71
- rencontre
  - application de, 95
  - de deux brins distingués, 95
  - effet de la greffe sur la, 99
- revêtement universel, 24
- section d'un fibré, 15
- selle connectante, 64

- semi-conjugué(e), 34, 37
- signe d'une liaison
  - de type  $i + 1 / i$ , 25
  - de type  $i / i$  ou  $L$ -élémentaire, 42
- somme connexe plongée, 51
  - itérée, 53
- source, 94
  - distinguée, 94
- stabilisation, 33
- stratification
  - de l'espace des 1-formes dans la classe  $u$ , 32
  - de l'espace des 1-formes fermées, 32
  - $L$ -élémentaire, 41
- suivre par continuité, 37
- support, 1
- taille, 26
  - d'un chemin de 1-formes basé, 39
  - et positivité, 30
- temps
  - de glissement, 42
  - de pré-élimination, 77
  - de stabilisation, 33
- théorème de forme normale, 100
- trajectoire, 22
- tronc/racine, 7
- troncature
  - d'un élément de l'anneau de Novikov, 5
  - d'une variété invariante, 22
- $u$ -enroulement, 25, 26
- $u$ -filtration de  $\mathbb{Z}[G]$ , 107
- ultramétrique, 110
- unicité des naissances, 36
- unité triviale, 113
- valuation, 3, 112
  - d'un anneau filtré, 108
- variété
  - invariante tronquée à la longueur  $L$ , 22
  - stable/instable/invariante, 20
  - stable/instable/invariante locale, 20
- zéro
  - codimension d'un, 16
  - d'un champ de vecteurs, 15
  - d'une 1-forme, 15
  - de type Morse, 15
  - de type naissance/élimination, 15
  - de type queue d'aronde, 15
  - $L$ -indépendant, 71

**Résumé :** Le cadre de cette étude est une variété fermée de dimension au moins six qui est munie d'une classe de cohomologie de De Rham non-nulle. L'objectif de la thèse est de créer des outils pour répondre au problème de savoir si deux 1-formes fermées non-singulières (sans zéro) dans la classe fixée sont toujours isotopes. La réponse générale à la question est *non*, et une obstruction de type  $K$ -théorique est attendue. Il est toujours possible de relier deux 1-formes fermées non singulières par un chemin qui reste dans la classe de cohomologie ; l'isotopie des extrêmes du chemin équivaut à déformer le chemin par une homotopie relative en un autre constitué de 1-formes non-singulières.

On introduit deux sortes de pseudo-gradients pour chaque nombre  $L$  positif : ceux avec une liaison  $L$ -élémentaire et ceux que nous appelons  $L$ -transverses. Ils forment une classe de champs de vecteurs adaptés aux 1-formes qui permettent de faire une lecture algébrique associée au chemin. Cette lecture est analogue à celle qui est faite dans la théorie de Hatcher-Wagoner qui traitait le problème d'isotopie pour les fonctions à valeurs réelles sans point critique. On réussit à trouver un nombre  $L$  assez grand pour déformer un chemin de 1-formes à deux indices critiques en un autre chemin muni d'un équipement  $L$ -transverse qui est sous *forme normale*. Les zéros d'un tel chemin de 1-formes qui sont nés ensemble, s'éliminent ensemble et de plus le graphique de Cerf-Novikov associé se ferme : la lecture algébrique citée appartient à un certain  $K_2$ , ce qui est au point de départ de la définition d'une obstruction à l'isotopie des 1-formes fermées non-singulières.

**Mots clés :** 1-forme fermée - pseudo-isotopie - pseudo-gradient adapté - transversalité - glissement d'anse - graphique de Cerf -  $K$ -théorie algébrique - complexe de Morse-Novikov

**Summary :** The framework of this study is a closed manifold of dimension at least six that is provided with a nonzero De Rham cohomology class. The aim is to create tools to address the next problem : two closed non-singular (without zeroes) 1-forms in the fixed class are always isotopic ? The general answer to the question is *no*, and a  $K$ -theoretical obstruction is expected. It is always possible to connect two non-singular closed 1-forms by a path that remains in the cohomology class ; the isotopy of the two ends of the path is equivalent to find a relative homotopy of the path to another one made of non-singular 1-forms only.

We introduce two kinds of pseudo-gradients for each positive number  $L$  : those with an  $L$ -elementary link and those that we call  $L$ -transverse. They form a class of vector fields adapted to the 1-forms that allows to do an algebraic reading associated with the path. This reading is similar to that made in the theory of Hatcher-Wagoner who treated the isotopy problem of real-valued functions without critical points. We manage to find  $L$ , a number large enough to deform a path of 1-forms with only two critical indices into another one with an  $L$ -transverse equipment in *normal form*. The zeroes of such a path that are born together, die together and moreover, the associated Cerf-Novikov graphic is closed : the cited algebraic reading belongs to some  $K_2$ , which is the starting point for the definition of an obstruction for two non-singular closed 1-forms to be isotopic.

**Key words :** closed 1-form - pseudo-isotopy - adapted pseudo-gradient - transversality - handle slide - Cerf's graphic - algebraic  $K$ -theory - Morse-Novikov complex